Материалы для проведения регионального этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Второй день

31 января – 1 февраля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения III этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также: М. А. Дидин, В. Б. Мокин, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, Г. Р. Челноков, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2024 г.** (I тур) и **1 февраля 2024 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2023–2024 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. На доске записано 7 различных чисел, сумма которых равна 10. Петя умножил каждое из них на сумму остальных шести и записал 7 полученных произведений в тетрадь. Оказалось, что в тетради встречаются только четыре различных числа. Найдите одно из чисел, записанных на доске. (*И. Богданов*)

Ответ. -20.

Решение. Для каждого числа x, написанного на доске, произведение x и суммы шести оставшихся равно $f(x) = x(10-x) = 10x - x^2$. Квадратичная функция $f(x)$ принимает все значения, кроме максимального, два раза — а именно, в точках a и $10 - a$. Значит, если $f(a) = f(b)$ при $a \neq b$, то $a + b = 10$.

Таким образом, каждое число встречается в тетради не более двух раз. Значит, так как в тетради всего четыре различных числа, три из них встречаются по два раза, и ещё одно — один раз. Таким образом, шесть из семи чисел на доске разбиваются на пары так, что сумма чисел каждой пары равна 10. Значит, сумма этих шести чисел равна 30, тогда седьмое число равно $10 - 30 = -20$.

Замечание 1. На доске могли быть выписаны любые семь чисел вида $-20, a, 10 - a, b, 10 - b, c, 10 - c$ (если все эти семь чисел различны). Значит, ни одно число с доски, кроме -20, определить невозможно.

Замечание 2. Можно провести и прямое рассуждение, без ссылок на свойства квадратичной функции. Например, если $f(a) = f(b)$, то $0 = (10a - a^2) - (10b - b^2) = (a - b)(10 - a - b)$, поэтому либо $a = b$, либо $a + b = 10$.

Комментарий. Доказано только, что в тетради три числа встречаются по два раза, а четвёртое — один раз — 2 балла.

9.7. На окружности длиной 1 метр отмечена точка. Из неё в одну и ту же сторону одновременно побежали два таракана с различными постоянными скоростями. Каждый раз, когда быстрый таракан догонял медленного, медленный мгновенно разворачивался, не меняя скорости. Каждый раз, когда они встречались лицом к лицу, быстрый мгновенно разворачивался, не меняя скорости. На каком расстоянии от отмеченной точки могла произойти их сотая встреча? (*И. Богданов*)

Ответ. На нулевом.

Первое решение. Назовём быстрого и медленного таракана B и M соответственно. Если таракан бежит в том же направлении, что и в момент старта, то будем говорить, что он бежит *вперёд*, в противном случае будем говорить, что он бежит *назад*.

До первой встречи оба таракана бегут вперёд, между первой и второй встречами B бежит вперёд, а M — назад. Между второй и третьей встречами оба таракана бегут назад, а между третьей и четвёртой встречами B бежит назад, а M — вперёд. Наконец, на четвёртой встрече B разворачивается, и они оба снова начинают бег вперёд.

Будем следить за перемещением M. Если между двумя встречами тараканы бегут в противоположные стороны, между такими встречаем всегда проходит одно и то же время, а значит, M всегда пробегает одно и то же расстояние. Таким образом, между первой и второй встречами, а также между третьей и четвертой встречами M пробегает одно и то же расстояние в противоположных направлениях. Аналогично, когда между двумя встречами тараканы бегут в одном направлении, это тоже всегда занимает одинаковое время, и M пробегает одно и то же расстояние. Таким образом, до первой встречи, а также между второй и третьей встречами M также пробегает одно и то же расстояние в противоположных направлениях. Стало быть, в момент четвертой встречи M (а значит, и B) будет в точке старта.

Далее эта ситуация будет повторяться каждые 4 встречи. Следовательно, в точке старта тараканы будут и в момент сотой встречи.

Второе решение. Обозначим тараканов так же, как и выше; пусть их скорости равны $b > m$ м/с. Для определенности будем считать, что изначально тараканы бегут по часовой стрелке, и расстояние будем отмерять именно в этом направлении.

Когда тараканы бегут в одну сторону, скорость удаления B

от M равна $b-m$, поэтому до первой встречи они будут бежать $\frac{1}{b-m}$ секунд, и M до встречи пробежит $\frac{m}{b-m}$ метров. Дальше тараканы будут двигаться навстречу друг другу со скоростью сближения $b+m$, поэтому до второй встречи они будут бежать $\frac{1}{b+m}$ секунд, и до этой встречи M сместится от точки старта на $\frac{m}{b-m}-\frac{m}{b+m}=\frac{2m^2}{b^2-m^2}$ метров.

Дальше оба таракана будут бежать против часовой стрелки в течении $\frac{1}{b-m}$ секунд, поэтому общее смещение M от точки старта будет равно $\frac{2m^2}{b^2-m^2}-\frac{m}{b-m}=-\frac{m}{b+m}$ (т.е. в итоге он сместится на расстояние $\frac{m}{b+m}$ против часовой стрелки). Наконец, после этого M развернётся, и они будут бежать в противоположных направлениях $\frac{1}{b+m}$ секунд. Следовательно, их четвёртая встреча произойдёт на расстоянии $-\frac{m}{b+m}+\frac{m}{b+m}=0$ от точки старта.

Таким образом, в четвёртый раз они обязательно встречаются в точке старта и после встречи снова побегут по часовой стрелке. Но тогда их сотая встреча также произойдет в точке старта.

Комментарий. При рассуждениях как во втором решении участники могут рассуждать не в терминах перемещения M, а в терминах «расстояния от точки старта». Формально эти рассуждения могут быть не совсем верны, ибо тараканы до встречи могут пробежать несколько кругов. Однако предлагается в случаях, когда решение в остальном верно, за это баллов не снижать.

9.8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP=PQ=QC$. Точки X и Y выбраны соответственно на отрезках AC и AB так, что $PX\perp AC$ и $QY\perp AB$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC равноудалена от прямых XQ и YP. (*А. Матвеев*)

Решение. Пусть M — середина BC (тогда M — ещё и середина PQ); пусть G — точка пересечения медиан треугольника ABC.

По свойству медианы имеем $MG:GA=1:2$. А так как

$MP : PB = 1 : 2$, получаем, что $PG \parallel BA$. Тогда $\angle YPG = \angle PYB$ и $\angle QPG = \angle PBY$. Но YP — медиана прямоугольного треугольника BYQ, поэтому $\angle PYB = \angle PBY$. Значит, $\angle YPG = \angle QPG$, т. е. PG — биссектриса угла QPY. Поэтому точка G равноудалена от прямых PQ и PY.

Аналогично показывается, что QG — биссектриса угла PQX, и потому точка G равноудалена от PQ и QX. Значит, она равноудалена от трёх прямых YP, PQ и XQ. Этим завершается решение.

Замечание. В ситуации, описанной в условии (когда треугольник ABC остроугольный), получается, что G — центр вневписанной окружности треугольника PQR, где R — точка пересечения прямых XQ и YP.

Комментарий. Показано, что $PG \parallel AB$ — 2 балла.

За получение различных соотношений между отрезками, углами и т. п., без дальнейшего их применения баллы не добавляются.

Из факта о том, что PQ и QG — биссектрисы углов QPY и PQX, делается вывод, что G — центр вневписанной окружности треугольника PQR (без обоснования, почему эта окружность вневписанная, а не вписанная) — баллы не снимаются.

9.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.) (*И. Богданов*)

Ответ. $2^{3\cdot 37^2} = 2^{4107}$.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной k, разобьём его на правильные треугольнички со стороной 1 и отметим все вершины этих треугольничков; полученную конструкцию назовём *k-треугольником.* В дальнейшем под *прямыми* мы всегда будем понимать прямые, параллельные сторонам этого треугольника и проходящие через хотя бы одну отмеченную точку.

Лемма. *Пусть A — отмеченная точка в k-треугольнике. Тогда существует единственный способ провести k прямых так, что все отмеченные точки, кроме, возможно, A, покрыты этими прямыми. А именно, для каждой стороны k-треугольника надо провести все прямые, параллельные ей и лежащие между этой стороной и точкой A (включая саму сторону, но исключая прямую, содержащую A, см. рис. 1).*

Доказательство. Индукция по k. База при $k = 1$ проверяется легко: надо провести прямую, содержащую две оставшихся точки, кроме A.

Для перехода рассмотрим сторону k-треугольника, на которой не лежит A. Если прямая, содержащая эту сторону, не проведена, то все $k + 1$ отмеченных точек на этой прямой должны быть покрыты различными прямыми; это невозможно, так как прямых k. Значит, эта прямая проведена. Выкинув её и точки k-треугольника, лежащие на ней, получаем $(k-1)$-треугольник, в котором проведено $k - 1$ прямых с теми же условиями. Осталось применить предположение индукции. □

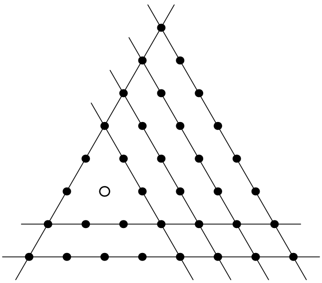

Рис. 1

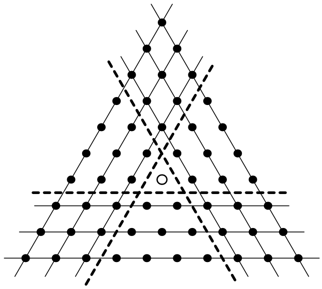

Рис. 2

Перейдём к задаче. Рассмотрим одно из разбиений на линейные множества. Для каждого множества проведём прямую, его содержащую. Тогда эти прямые покрыли все отмеченные точки 111-треугольника, кроме, возможно, его центра A. Значит, эти прямые устроены так, как описано в лемме, и для любого разбиения этот набор прямых один и тот же.

Заметим, что наш 111-треугольник разбился на 6 областей:

три «ромба» в углах, состоящих из точек, покрытых нашими прямыми дважды, и три «трапеции» у сторон, в которых каждая точка покрыты одной прямой (см. рис. 2). Тогда каждая точка в «трапеции» относится к множеству, лежащему на этой прямой; каждую же точку в «ромбе» можно отнести к любому из двух множеств, лежащих на проходящих через неё прямых. Все такие выборы можно сделать независимо друг от друга. Поскольку в каждом из трёх «ромбов» всего 37^2 точек, получаем, что требуемых разбиений ровно $2^{3\cdot 37^2}$.

Замечание. Вариант доказательства леммы можно получить, показав сначала, что такое покрытие невозможно осуществить при помощи менее, чем k прямых.

Комментарий. Доказано только, что все точки, кроме одной, нельзя покрыть менее чем 111 прямыми — 1 балл.

Доказана только лемма, а подсчёт проведён неверно — 4 балла.

Лемма используется без доказательства — не более 3 баллов.

Во в целом верном подсчёте допущена ошибка на ± 1 (например, утверждается, что в ромбах по 36^2 или по 38^2 точек) — снимается 1 балл.

9.10. Существует ли натуральное число $n > 10^{100}$ такое, что десятичные записи чисел n^2 и $(n+1)^2$ отличаются перестановкой цифр? (Иначе говоря, в десятичных записях чисел n^2 и $(n+1)^2$ должно быть поровну цифр 0, поровну цифр 1, …, поровну цифр 9.)

(*А. Чиронов*)

Ответ. Да.

Первое решение. Заметим, что числа $13^2 = 169$ и $14^2 = 196$ получаются друг из друга перестановкой цифр.

Пусть теперь $a = \frac{1}{2}(13 \cdot 1000 + 14) = 6507$. Положим $n = 10^{100} \cdot a + 13$. Заметим тогда, что

$$n^2 = 10^{200} \cdot a^2 + 10^{100} \cdot (1000 \cdot 13^2 + 14 \cdot 13) + 13^2,$$
$$(n+1)^2 = 10^{200} \cdot a^2 + 10^{100} \cdot (1000 \cdot 13 \cdot 14 + 14^2) + 14^2.$$

Иначе говоря, десятичная запись числа n^2 состоит из блоков a^2, $182 = 14 \cdot 13$ и $169 = 13^2$ (дважды), разделённых нулями; у числа же $(n+1)^2$ эти блоки суть a^2, $182 = 13 \cdot 14$ и $196 = 14^2$ (дважды). Поскольку количества разделяющих нулей в обоих случаях одинаковы, получаем, что число n удовлетворяет требованиям.

Замечание. Подобная же конструкция сработает, если вместо 13 и 14 взять произвольные числа k и $k+1$, квадраты которых отличаются друг от друга перестановкой цифр, а вместо a выбрать такое число t, для которого числа $2tk$ и $2t(k+1)$ также отличаются друг от друга перестановкой цифр. Существуют и другие способы подобрать такие числа k и t.

Второе решение. Предположим, что нам удалось найти такое число b (возможно, с ведущим нулём), что набор цифр в десятичной записи числа $2b$ отличается от набора цифр в десятичной записи числа b выкидыванием цифры 4 и добавлением цифры 1 (иначе говоря, если к числу b приписать единицу, а к $2b$ — четвёрку, то полученные числа отличаются перестановкой цифр). Тогда в качестве числа n можно выбрать $n = 5\cdot 10^d\cdot b+1$ (где $d > 100$, и $d-1$ больше количества цифр в числе $2b$). Действительно, имеем

$$n^2 = 1 + 10^{d+1}\cdot b + 10^{2d}\cdot 25b^2,$$
$$(n+1)^2 = 4 + 10^{d+1}\cdot 2b + 10^{2d}\cdot 25b^2,$$

и мы опять видим, что эти числа состоят из блоков $(1, b, 25b^2)$ и $(4, 2b, 25b^2)$, разделённых нулями, а блоки получаются друг из друга перестановкой цифр.

Осталось найти такое число b. Если, например, потребовать, чтобы запись числа $2b$ получалась из записи числа b циклическим сдвигом и заменой 4 на 1, то такое число нетрудно найти, выписывая его цифры с конца. Подойдёт, например. число $b = 0526315789473684$; тогда $2b = 1052631578947368$.

Замечание. Это решение, разумеется, также допускает вариации.

10 класс

10.6. Сергей утверждает, что нашел различные вещественные числа x, y, z такие, что $\dfrac{1}{x^2+x+1}+\dfrac{1}{y^2+y+1}+\dfrac{1}{z^2+z+1}=4$. Могут ли слова Сергея быть правдой? (*П. Кожевников, фольклор*)

Ответ. Не могут.

Решение. Заметим, что $4(x^2+x+1)=(4x^2+4x+1)+3=$ $=(2x+1)^2+3\geqslant 3$, причем равенство достигается только при $x=$ $=-1/2$. Тогда первое слагаемое $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ всегда положительно и не превосходит $4/3$. То же верно и для других слагаемых. Значит, левая часть уравнения Сергея не превышает $4/3\cdot 3=4$, причем равенство достигается лишь при $x=y=z=-1/2$, значит, равенство невозможно для различных x, y, z.

Замечание. Неравенство $\dfrac{1}{x^2+x+1}\leqslant 4/3$ может быть доказано по-разному, например, исследованием квадратичной функции $f(x)=x^2+x+1$.

Комментарий. Верно доказано неравенство $\dfrac{1}{x^2+x+1}\leqslant$ $\leqslant 4/3$ или верно найдена область значений функции $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ — 5 баллов.

10.7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой? (*П. Кожевников*)

Ответ. Могли.

Решение. Примером могут служить числа вида $\overline{A0}$, $\overline{A1}$, $\overline{A2}$, $\overline{A3}$, $\overline{A4}$, $\overline{A5}$, $\overline{A6}$, $\overline{A7}$, $\overline{A8}$, $\overline{A9}$, где $A=1023456789$.

Замечание 1. Ясно, что в качестве A можно взять любое число, состоящее из одинакового количества цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Замечание 2. На самом деле, можно показать, что все возможные примеры устроены так, как указано в замечании 1.

Комментарий. Есть ответ без предъявления примера — 0 баллов.

Есть верный пример — 7 баллов.

10.8. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A=\angle C=90^\circ$. Известно, что его вершины A и D вместе с серединами сторон AB и BC лежат на одной окружности. Докажите, что вершины B и C вместе с серединами сторон AD и DC тоже лежат на одной окружности.

(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Обозначим через K, L, M, N середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно (см. рис. 3). По условию, четырехугольник $AKLD$ — вписанный. Значит, $\angle KLD = 180^\circ - \angle KAD = 90^\circ$. Поскольку KL — средняя линия треугольника ABC, то $KL \parallel AC$, поэтому $LD \perp AC$. Пусть отрезки DL и AC пересекаются в точке D_1.

Опустим из точки B перпендикуляр BB_1 на прямую AC. Тогда $BB_1 \parallel LD_1$, значит, D_1 — середина отрезка CB_1 по теореме Фалеса. Кроме того, четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, построенную на отрезке BD как на диаметре, обозначим центр этой окружности через O. Вновь по теореме Фалеса проекции точек B и D на прямую AC находятся на равном расстоянии от проекции точки O, то есть от середины отрезка AC. Это означает, что $CD_1 = AB_1$. Итого, $AB_1 = CD_1 = B_1D_1$. Значит, B_1N — средняя линия в треугольнике AD_1B, поэтому $B_1N \parallel DD_1$ и $\angle D_1B_1N = 90^\circ$. Поскольку еще и NM — средняя линия треугольника ACD, то $NM \parallel AC$ и $\angle B_1NM = 90^\circ$. Следовательно, точки B, C, N и M лежат на окружности с диаметром BM, что и требовалось доказать.

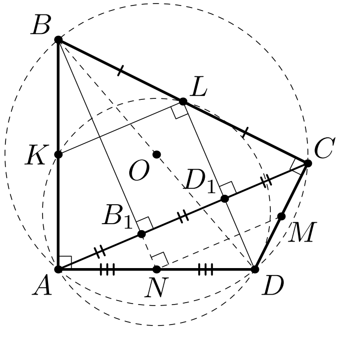

Рис. 3

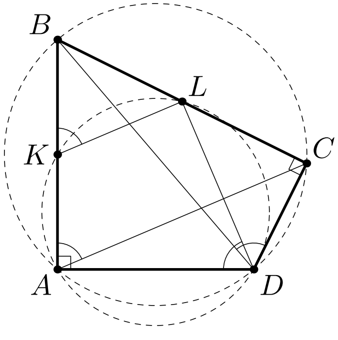

Рис. 4

Второе решение. Воспользуемся обозначениями из первого решения. Поскольку KL — средняя линия треугольника ABC, то $KL \parallel AC$. Отсюда и из вписанности четырехугольника $ABCD$, мы получаем равенства углов: $\angle BDC = \angle BAC = \angle BKL = 180^\circ - \angle AKL$ (см. рис. 4). Таким образом, вписанность четырехугольника $AKLD$ равносильна равенству углов $\angle ADL = \angle BDC$, что эквивалентно равенству $\angle ADB = \angle CDL$. Последнее равенство равносильно подобию треугольников LCD и BAD, что эквивалентно равенству отношений их катетов $\frac{LC}{CD} = \frac{AB}{AD}$. Домножая на знаменатели, получаем соотношение $AB \cdot CD = \frac{1}{2} AD \cdot BC$. Рассуждая аналогично, получаем, что это же равенство равносильно вписанности четырехугольника $BNMC$, что и требовалось.

Комментарий. Получено $LD \perp AC$ и/или понято, что $BN \perp AC$ (или, эквивалентно, $LD \parallel BN$) достаточно для решения — 1 балл.

Получено подобие $\triangle LCD \sim \triangle BAD$ и/или понято, что $\triangle BAN \sim \triangle BCD$ достаточно для решения — 2 балла.

Баллы за указанные продвижения не суммируются. За получение других начальных продвижений — различных соотношений, полученных из счёта углов, параллельности $KL \parallel AC$ и т.д. — баллы не добавляются.

10.9. Найдите все тройки (не обязательно различных) натуральных чисел a, b, c такие, что каждое из чисел $a + bc$, $b + ca$, $c + ab$ является простым делителем числа $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$.

(*А. Чиронов, И. Богданов*)

Ответ. $(1, 1, 1)$.

Решение. Видим, что $a = b = c = 1$ удовлетворяет условию. Далее будет доказано, что других ответов нет.

1) Предположим, что $s = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ делится на pqr, где $p = a + bc$, $q = b + ca$, $r = c + ab$ (в частности, это следует из условия, если дополнительно предполагать, что p, q, r различны).

Заметим, что один из трех сомножителей a^2+1, b^2+1, c^2+1 не может делиться на произведение двух из чисел p, q, r, так как он меньше этого произведения. Действительно, рассмотрим, например, $pq = (a+bc)(b+ca)$. Из раскрытия скобок видим, что $pq > c^2(ab) + ab \geqslant c^2 + 1$, $pq > b^2c + ab \geqslant b^2 + 1$ и аналогично $pq > a^2 + 1$. Значит, каждый из сомножителей $a^2 + 1$, $b^2 + 1$,

c^2+1 должен делиться ровно на одно из чисел p, q, r. Пусть, для определенности, a — наименьшее из чисел a, b, c. Тогда $a^2 \leqslant bc$ и $1 \leqslant a$, поэтому a^2+1 может делиться на $p = bc + a$ только в случае $a^2 = bc$ и $a = 1$, т.е в случае $a = b = c = 1$. Далее, $a^2 \leqslant ac$ и $1 \leqslant b$, поэтому $a^2 + 1$ может делиться на $q = ac + b$ только в случае $a^2 = ac$ и $b = 1$, т.е в случае $a = b = c = 1$. Аналогично, $a^2 + 1$ может делиться на $r = ab + c$ только при $a = b = c = 1$.

2) Пусть какие-то два из трех чисел p, q, r совпадают, скажем, $p = q$. Тогда $0 = q - p = b + ca - a - bc = (a - b)(c - 1)$. Значит, либо $a = b$, либо $c = 1$. Первый случай возможен лишь при $a = b = 1$, иначе $p = a + bc = a + ac = a(a + c)$ — составное число, про дает противоречие. Значит, в любом случае среди a,b,c присутствует единица, скажем, $c = 1$.

Тогда наши данные простые числа — это $p = a + b$, $q = a + b$ и $r = ab+1$, и они должны быть делителями $s = 2(a^2+1)(b^2+1)$. Если хотя бы одно из чисел a, b больше 1, то $p > 2$ и на $p = a+b$ обязан делиться хотя бы один из сомножителей $a^2 + 1$ и $b^2 + 1$. А поскольку разность $(a^2 + 1) - (b^2 + 1) = (a - b)(a + b)$ делится на $p = a + b$, получаем, что оба числа $a^2 + 1$, $b^2 + 1$ делятся на p. Тогда если r отлично от $p = q$, то s делится на pqr, что разобрано в случае 1).

Остается вариант $p = q = r$. Рассуждаем как в предыдущем случае и получаем, что хотя бы два из трех чисел a, b, c обязаны равняться 1. Пусть, например, $a = b = 1$, $p = q = r = c + 1$, $s = 4(c^2 + 1)$. Случай $c = 1$ уже был ранее. Если $c > 1$, то $c + 1$ — нечетное простое, значит $c^2 + 1$ должно делиться на $c + 1$. Отсюда $(c^2 + 1) - (c + 1) = c(c - 1)$ должно делиться на $c + 1$. Но это невозможно, так как $0 < c - 1 < c < c + 1$ и $c + 1$ — простое.

Комментарий. Только верный ответ (возможно, с проверкой) — 0 баллов.

Верно разобран случай различных p, q, r, либо случай делимости s на pqr (при этом, возможно, делимость s на pqr ошибочно выведена из условия) — 4 балла.

Верно разобран случай, два из трех чисел p, q, r равны друг другу, а третье не равно им — 2 балла.

Верно разобран случай $p = q = r$ — 1 балл.

Баллы за указанные продвижения суммируются. За рассмотрение других частных случаев, например $a = b = c$ или $a = b$, $c = 1$ баллы не добавляются.

10.10. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причём дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что все рыцари отвечали на вопрос верно, а все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1. Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей? (*Я. Шубин, Г. Шубин*)

Ответ. 1012.

Решение. Положим $n = 1012$.

Оценка. Людей обозначим вершинами, номер вершины будет означать ответ соответствующего человека, а если пара людей дружит, то проведем ребро между соответствующими вершинами.

Пусть A — множество всех людей, которые назвали числа от 0 до $n-1$, а B — множество всех людей, которые назвали числа от n до $2n-1$. Пусть d_i — степень вершины i (т.е. количество ребер, выходящих из вершины i). Тогда по условию $d_i = i$, если i — рыцарь, и $|d_i - i| = 1$ в противном случае. Пусть в множестве A ровно x лжецов, а в множестве B — ровно y.

Оценим количество E ребер между людьми из разных множеств A и B.

С одной стороны, E не больше суммы степеней вершин множества A, откуда

$$E \leqslant d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1} \leqslant$$
$$\leqslant 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) + x = \frac{(n-1)n}{2} + x.$$

С другой стороны, из каждой вершины i множества B не более $n-1$ ребер идет в вершины множества B, и значит, не менее $d_i - (n-1)$ ребер идет в вершины множества A. Отсюда

$$E \geqslant d_n + d_{n+1} + \ldots + d_{2n-1} - n(n-1) \geqslant$$
$$\geqslant n + (n+1) + \ldots + (2n-1) - y - n(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - y.$$

Получаем неравенство

$$\frac{(n-1)n}{2} + x \geqslant \frac{n(n+1)}{2} - y,$$

откуда $x + y \geqslant n$. Это означает, что всего лжецов не менее n.

Пример. Как и прежде, номер человека будет означать его ответ. Возьмем два множества людей: $C = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $D = \{n, n+1, \ldots, 2n-1\}$. Пусть в множестве C никакие двое людей не дружат друг с другом, а в множестве D — любые двое дружат. Далее, пусть человек $i \in C$ и $j \in D$ дружат тогда и только тогда, когда $i + j \geqslant 2n - 1$. Тогда у человека $i \in C$ всего $i + 1$ друг: $2n-1, 2n-2, \ldots, 2n-i-1$. У человека $j \in D$ будет всего j друзей: это $j - n + 1$ людей $n-1, n-2, \ldots, 2n-j-1$ из множества C и все люди множества D, кроме него самого. При этом все люди в C — лжецы, а в D — рыцари. Видим, что все условия задачи выполняются.

Комментарий.

Только ответ — 0 баллов.

Приведен верный пример с обоснованием, что он работает — 2 балла.

Только приведена оценка, т.е. доказано, что менее 1012 лжецов быть не может — 5 баллов.

11 класс

11.6. У учителя есть 100 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 100 г. Он хочет раздать Пете и Васе по 30 гирь так, чтобы выполнялось следующее условие: никакие 11 Петиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Васиными гирями, а также никакие 11 Васиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Петиными гирями. Сможет ли учитель это сделать? (*О. Подлипский*)

Ответ. Сможет.

Первое решение. Выберем 30 гирь с массами вида $3k+1$ г и дадим Пете, а Васе дадим 30 гирь с массами вида $3k+2$ г. Тогда масса любых 12 гирь, взятых у одного человека, будет делиться на 3, а масса любых 11 гирь, взятых у одного человека, не будет делиться на 3.

Второе решение. Выберем 30 гирь с массами $1, 2, 3, \ldots 30$ г и дадим Пете, а Васе дадим 30 гирь с массами $71, 72, 73, \ldots 100$ г. Тогда у Пети масса любых 11 или 12 гирь будет меньше $30 \cdot 12 = 360$ г. А масса любых 11 или 12 гирь у Васи будет больше $70 \cdot 11 = 770$ г.

Комментарий. Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

Приведен пример верного разбиения на две группы по 30 гирь, но не объяснено, почему пример подходит (или объяснено только для одного из двух случаев) — 4 балла.

Приведен пример, который не работает хотя бы для одного выбора наборов гирь — 0 баллов.

11.7. График G_1 квадратного трехчлена $y = px^2 + qx + r$ с вещественными коэффициентами пересекает график G_2 квадратного трехчлена $y = x^2$ в точках A и B. Касательные в точках A и B к графику G_2 пересекаются в точке C. Оказалось, что точка C лежит на графике G_1. Найдите все возможные значения p.

(*А. Терёшин*)

Ответ. 2.

Первое решение. Касательная в точке $A(x_a; x_a^2)$ к графику G_2 имеет уравнение

$$y = f'(x_a)(x - x_a) + x_a^2 = 2x_a(x - x_a) + x_a^2 = 2x_a x - x_a^2.$$

Аналогично уравнение касательной в точке $B(x_b; x_b^2)$ есть $y = 2x_b x - x_b^2$, откуда точка пересечения C имеет координаты

$\left(\dfrac{x_a+x_b}{2}\,;x_ax_b\right)$. Три точки A, B и C принадлежат графику квадратного трёхчлена px^2+qx+r, поэтому

$$\begin{cases} px_a^2+qx_a+r=x_a^2, \\ px_b^2+qx_b+r=x_b^2, \\ p\cdot\left(\dfrac{x_a+x_b}{2}\right)^2+q\,\dfrac{x_a+x_b}{2}+r=x_ax_b. \end{cases}$$

Сложим первые два равенства и вычтем удвоенное третье, получим

$$p\cdot\left(x_a^2+x_b^2-\frac{x_a^2}{2}-x_ax_b-\frac{x_a^2}{2}\right)+q\cdot(x_a+x_b-x_a-x_b)+2r-2r=$$
$$=x_a^2+x_b^2-2x_ax_b,$$
$$p\cdot\left(\frac{x_a^2}{2}-x_ax_b+\frac{x_a^2}{2}\right)=x_a^2+x_b^2-2x_ax_b,$$
$$\frac{p(x_a-x_b)^2}{2}=(x_a-x_b)^2.$$

Так как $x_a\neq x_b$, получаем, что $p=2$.

Второе решение. Вычтем из обоих трёхчленов линейную функцию, график которой проходит через точки A и B. Обозначим полученные трёхчлены соответственно $P(x)$ и $Q(x)$ (где у $P(x)$ старший коэффициент равен p, а у $Q(x)$ он равен 1). Пусть абсциссы точек A и B равны соответственно x_a и x_b. Тогда $P(x_a)=P(x_b)=Q(x_a)=Q(x_b)=0$, и касательные в точках $(x_a,0)$ и $(x_b,0)$ к графику трёхчлена $Q(x)$ пересекаются на графике $P(x)$. В самом деле, вычитание линейной функции сохраняет условия касания прямой и параболы в точке с заданной абсциссой, а также пересечения двух прямых и параболы в одной точке.

Обозначим $(x_a+x_b)/2$ через x_m. Поскольку $Q(x_a)=Q(x_b)=$ $=0$, график трёхчлена $Q(x)$ симметричен относительно прямой $x=x_m$, поэтому касательные к этому графику в точках $(x_a,0)$ и $(x_b,0)$ пересекаются на оси симметрии. Пусть также точка пересечения касательных имеет координаты (x_m,y_c), а вершина параболы-графика $Q(x)$ имеет координаты (x_m,y_d).

Поскольку старший коэффициент трёхчлена $Q(x)$ равен 1, имеет место равенство $0-y_d=(x_b-x_m)^2$, или $y_d=-(x_a-x_b)^2/4$, поскольку график $Q(x)$ есть парабола $y = x^2$, перенесённая параллельно так, чтобы вершина попала в (x_m, y_d). По этой же причине угловые коэффициенты касательных в точках $(x_a, 0)$ и $(x_b, 0)$ есть $\pm(x_a - x_b)$; значит, $y_c = -(x_a - x_b)^2/2$. Таким образом, если перенести параболы-графики $P(x)$ и $Q(x)$ так, чтобы их вершины попали в $(0, 0)$, то ординаты точек с абсциссой $x = x_m$ на этих параболах будут соответственно $-y_c$ и $-y_d = -y_c/2$, из чего следует, что старший коэффициент у $P(x)$ в 2 раза больше, чем у $Q(x)$.

Замечание. Используя интерполяционный многочлен Лагранжа, можно получить, что

$$p = \frac{x_a^2}{(x_a - x_b)\left(x_a - \frac{x_a + x_b}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{x_b^2}{(x_b - x_a)\left(x_b - \frac{x_a + x_b}{2}\right)} + \frac{x_a x_b}{\left(\frac{x_a + x_b}{2} - x_a\right)\left(\frac{x_a + x_b}{2} - x_b\right)} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x_a^2 + x_b^2 - 2x_a x_b}{(x_a - x_b)^2} = 2.$$

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Приведение примера трехчлена с $p = 2$ не требуется.

Найдены координаты точки C — 1 балл.

11.8. В пространстве расположены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 с общей серединой M. Оказалось, что сфера ω, описанная около тетраэдра $MA_1B_1C_1$, касается плоскости ABC в точке D. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $MO = MD$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим через O_1 центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, через P — центр сферы ω (см. рис. 5). При центральной симметрии относительно точки M треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Следовательно, точки O и O_1 симметричны относительно точки M, то есть M — середина отрезка OO_1. Также мы получаем, что плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны. Тогда на прямой, проходящей через точку P перпендикулярно этим плоскостям, лежат точки D и O_1, поэтому $\angle O_1DO = 90°$. Таким образом, DM — медиана в прямоугольном треугольнике O_1DO, значит, $MO = MD$, что и требовалось.

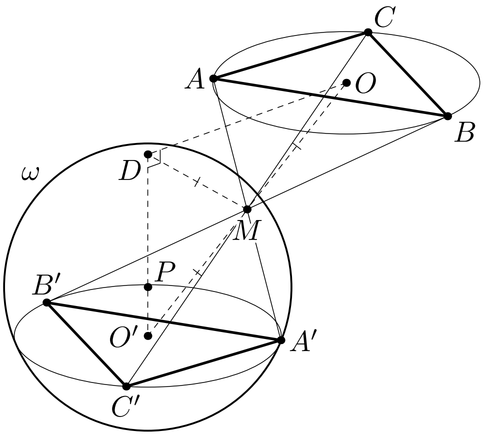

Рис. 5

Комментарий. 1) Отмечен центр O окружности, описанной около треугольника ABC и центр P сферы ω — 0 баллов.

2.1) Доказано, что точка M — середина отрезка OO_1 — 2 балла.

2.2) Задача сведена к доказательству того, что $\angle O_1DO = 90^\circ$ — 4 балла.

3.1) Доказано, что точки P, O_1, D лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскостям ABC и $A_1B_1C_1$ — 2 балла.

3.2) Доказано, что $\angle O_1DO = 90^\circ$ — 3 балла.

Суммируются баллы за критерии из разных групп. Внутри одной группы баллы не суммируются.

11.9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовём множество из нескольких отмеченных точек *линейным*, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

(*И. Богданов*)

Ответ. $2^{3\cdot 37^2} = 2^{4107}$.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной k, разобьём его на правильные треугольнички со стороной 1 и отметим все вершины этих треугольничков; полученную конструкцию назовём *k-треугольником.* В дальнейшем под *прямыми* мы всегда будем понимать прямые, параллельные сторонам этого треугольника и проходящие через хотя бы одну отмеченную точку.

Лемма. *Пусть A — отмеченная точка в k-треугольнике. Тогда существует единственный способ провести k прямых так, что все отмеченные точки, кроме, возможно, A, покрыты этими прямыми. А именно, для каждой стороны k-треугольника надо провести все прямые, параллельные ей и лежащие между этой стороной и точкой A (включая саму сторону, но исключая прямую, содержащую A, см. рис. 6).*

Доказательство. Индукция по k. База при $k = 1$ проверяется легко: надо провести прямую, содержащую две оставшихся точки, кроме A.

Для перехода рассмотрим сторону k-треугольника, на которой не лежит A. Если прямая, содержащая эту сторону, не проведена, то все $k + 1$ отмеченных точек на этой прямой должны быть покрыты различными прямыми; это невозможно, так как прямых k. Значит, эта прямая проведена. Выкинув её и точки k-треугольника, лежащие на ней, получаем $(k-1)$-треугольник, в котором проведено $k - 1$ прямых с теми же условиями. Осталось применить предположение индукции. □

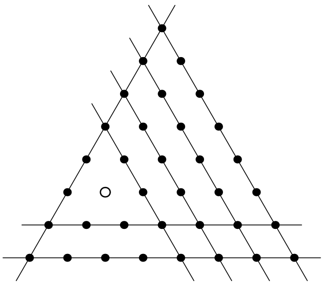

Рис. 6

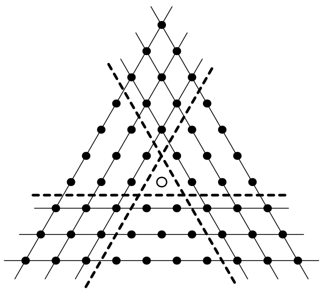

Рис. 7

Перейдём к задаче. Рассмотрим одно из разбиений на линейные множества. Для каждого множества проведём прямую, его содержащую. Тогда эти прямые покрыли все отмеченные точки 111-треугольника, кроме, возможно, его центра A. Значит, эти прямые устроены так, как описано в лемме, и для любого разбиения этот набор прямых один и тот же.

Заметим, что наш 111-треугольник разбился на 6 областей: три «ромба» в углах, состоящих из точек, покрытых нашими прямыми дважды, и три «трапеции» у сторон, в которых каждая точка покрыты одной прямой (см. рис. 7). Тогда каждая точка в «трапеции» относится к множеству, лежащему на этой прямой; каждую же точку в «ромбе» можно отнести к любому из двух множеств, лежащих на проходящих через неё прямых. Все такие выборы можно сделать независимо друг от друга. Поскольку в каждом из трёх «ромбов» всего 37^2 точек, получаем, что требуемых разбиений ровно $2^{3\cdot 37^2}$.

Замечание. Вариант доказательства леммы можно получить, показав сначала, что такое покрытие невозможно осуществить при помощи менее, чем k прямых.

Комментарий. Доказано только, что все точки, кроме одной, нельзя покрыть менее чем 111 прямыми — 1 балл.

Доказана только лемма, а подсчёт проведён неверно — 4 балла.

Лемма используется без доказательства — не более 3 баллов.

Во в целом верном подсчёте допущена ошибка на ± 1 (например, утверждается, что в ромбах по 36^2 или по 38^2 точек) — снимается 1 балл.

11.10. Дано натуральное число $n > 100$. Изначально на доске написано число 1. Каждую минуту Петя представляет число, записанное на доске, в виде суммы двух неравных положительных несократимых дробей, а Вася оставляет на доске только одну из этих двух дробей. Докажите, что Петя может добиться того, чтобы знаменатель оставшейся дроби через n минут не превышал $2^n + 50$ вне зависимости от действий Васи. (*М. Дидин*)

Решение. Приведем стратегию для Пети. Для этого представим 1 в виде суммы 2^n дробей с числителями 1, разобьем их на пары не равных, сложим числа в каждой паре. Затем 2^{n-1}

полученных результатов вновь разобьем на пары не равных, и сложим числа в каждой паре. Будем продолжать так делать, пока не получится одно число. Поскольку сумма всех дробей равна 1, то после n шагов остается число 1.

Предположим, что описанный выше процесс возможен. В таком случае Петя разложит 1 в сумму двух чисел, которые складывались на n-м шаге. Вася выберет одно из слагаемых, которые представимо как сумму двух чисел, сложением которых данное число было получено на $n-1$-м шаге и т.д. В конечном итоге останется одна из исходных 2^n дробей.

Для реализации указанного процесса нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Есть 2 четвёрки чисел $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ и $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$. Тогда их можно сгруппировать по парам (a_i, b_j), чтобы числа в каждой паре были различны и суммы чисел в каждой паре были различны.*

Доказательство. Разберем несколько случаев:

1°. $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Если $a_4 \neq b_4$, не умаляя общности $a_3 \geqslant b_3$ и можно сгруппировать $a_1+b_2 > b_1+a_3 > a_2+b_3 > a_4+b_4$. В случае $a_4 = b_4$ и н.у.о. $a_3 \geqslant b_3$ группируем $a_1 + b_2 > b_1 + a_3 > a_2 + b_4 > b_3 + a_4$.

2°. $a_3 = b_3$, $a_4 = b_4$ сводится к предыдущему, если мы перейдем к четверкам чисел $-a_i, -b_i$.

3°. Пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) разные, а также пары (a_3, b_3) и (a_4, b_4) разные. В таком случае покажем как сгруппировать числа первых двух пар между собой, с числами в третьей и четвертой паре поступим аналогично, явно получив две меньшие суммы чем в первой паре. Если $a_1 = b_1$ или $a_2 = b_2$ подходит a_1+b_2, a_2+b_1, в противном случае можно сгруппировать a_1+b_1 и $a_2 + b_2$. $\square$

Покажем, что описанный в начале решения процесс возможен (получится на каждом шаге складывать различные числа), если исходные 2^n дробей удастся разбить на четверки так, чтобы в каждой четверке были попарно различные дроби. Действительно, в таком случае на очередном шаге мы разобьем четверки на пары и согласно лемме будем складывать числа из разных четверок. После каждого такого шага получившиеся суммы вновь будут разбиваться на четверки попарно различных чисел. Продолжая так первые $n-2$ шага, мы в итоге получим четверку различных чисел $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, на $n-1$ шаге сложим x_1+x_2 и x_3+x_4, и на n-м шаге сложим уже эти два числа.

Таким образом, достаточно представить $1/4$ в виде суммы 2^{n-2} дробей вида $1/m$ четырьмя разными способами, каждый раз используя разные знаменатели, не превосходящие 2^n+50.

Первый способ — сумма 2^{n-2} одинаковых дробей $\frac{1}{2^n}$. Построим три других представления. Заметим, что среди чисел n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, $n-5$ не более одной степени двойки и не более двух простых чисел (потому что простые числа, большие трех, могут давать только остатки 1 и 5 от деления на 6), уберем такие числа из рассмотрения. Любое оставшееся число можно представить в виде $n-k=pt$, где $p,t>1$ и t нечетно. Тогда $2^{n-k}+1$ кратно 2^p+1, обозначим частное от деления через q. Получаем, что $2^n+2^k=2^k(2^p+1)q$. Возьмем $2^{n-2}-2^{k+p-2}$ дроби вида $\dfrac{1}{2^n+2^k}$ и 2^{k+p-2} дроби вида $\dfrac{1}{2^{k+p}\cdot q}$. Поскольку $k\leqslant 5$, то $2^{k+p}\cdot q<2^n+2^k<2^n+50$. Посчитаем сумму этих дробей:

$$\frac{2^{n-2}-2^{k+p-2}}{2^n+2^k}+\frac{2^{k+p-2}}{2^{k+p-2}\cdot q}=\frac{1}{4}\left(\frac{2^n-2^{k+p}}{2^n+2^k}+\frac{2^k(2^p+1)}{2^n+2^k}\right)=\frac{1}{4}\,.$$

Проделаем так для трех различных значений k, остается убедиться, что полученные представления не содержат одинаковых дробей. Ясно, что с первым выбранным набором три новых не пересекаются, а также дроби вида $\dfrac{1}{2^n+2^k}$ могут быть лишь в одном наборе. Остается проверить, что дроби вида $\dfrac{1}{2^{k+p}q}$ различны. Предположим противное, $2^{k+p}q=2^{k_1+p_1}q_1$. Поскольку q и q_1 нечетны, получаем, что $q=q_1$, и это число — общий делитель 2^n+2^k и $2^n+2^{k_1}$. Тогда $2^k-2^{k_1}$ кратно q, поэтому $q<32$. Однако, $p=\dfrac{n-k}{t}<n/3$, откуда $2^p+1<2^{n/2}$ и $q>2^{n/2}>32$, противоречие.

Замечание. Неформально говоря, Петя с самого начала анализирует все возможные способы течения игры и для каждого варианта заранее продумывает ответ. Этому можно сопоставить двоичное дерево ранга n, в 2^n листьях которого содержатся все возможные исходные (дроби вида $\frac{1}{m}$ с суммой 1 и знаменателями, не превосходящими 2^n+50), а в каждой из остальных вершин записано число, равное сумме чисел в вершинах-потомках. Задача эквивалентна тому, что существует такое дерево, причем у каждой вершины (кроме листьев), в вершинах-потомках записаны разные числа.

Комментарий. (A0) Идея выделять 2^n возможных исходов и описание необходимых условий (в терминах процесса или двоичного дерева) — 1 балл.

(A1) Задача сведена к возможности построения процесса, используемого в решении — 2 балла.

(B0) Сформулирована лемма о разбиении чисел в двух четверках — 1 балл.

(B1) Доказана лемма о разбиении чисел в двух четверках — 2 балла.

(C0) Идея разбивать $\frac{1}{4}$ в виде суммы дробей четырьмя способами так, чтобы разные способы содержали разные дроби и в каждом способе было 2^{n-2} дроби — 1 балл. За предъявление тривиального способа (разбиение на равные дроби) баллы дополнительно не начисляются.

(C1) Построено разбиение единицы на дроби, которые разбиваются на четверки не равных — 3 балла.

Суммируются лишь продвижения из разных групп (A), (B), (C), продвижения за критерии одной группы не суммируются.