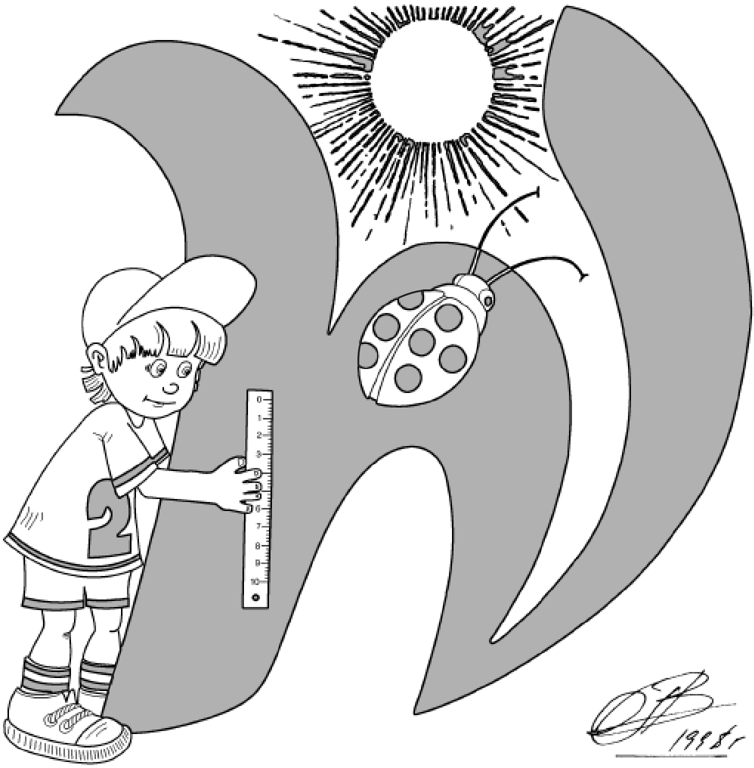
Министерство просвещения Российской Федерации
Центральная предметно-методическая комиссия
Всероссийской олимпиады школьников по физике

Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

Теоретический тур



Москва, 2025 г.

Комплект задач подготовлен
центральной предметно-методической комиссией
Всероссийской олимпиады школьников по физике
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

Теоретический тур

7-9 класс

- **7-Т1**. Александр Евсеев
- **7-Т2**. Ольга Инишева
- **7-Т3**. Константин Кутелев
- **7-Т4**. Александр Евсеев
- **8-Т1**. Андрей Сеитов
- **8-Т2**. Александр Евсеев
- **8-Т3**. Александр Евсеев
- **8-Т4**. Ольга Инишева
- **9-Т1**. Константин Кутелев
- **9-Т2**. Антон Вергунов
- **9-Т3**. Владимир Савинцев
- **9-Т4**. Денис Рубцов
- **9-Т5**. Матвей Муравьев, Иван Гурьянов

10-11 класс

- **10-Т1**. Алексей Заяц
- **10-Т2**. Александр Киреев
- **10-Т3**. Леонид Колдунов
- **10-Т4**. Анна Шишкина
- **10-Т5**. Юрий Черников
- **11-Т1**. Александр Аполонский
- **11-Т2**. Александр Аполонский
- **11-Т3**. Константин Парфенов
- **11-Т4**. Алексей Заяц
- **11-Т5**. Юрий Черников

Как готовиться к региональному этапу?

В МФТИ запущен классный проект «Физтех-регионам» (https://os.mipt.ru), где в публичном бесплатном доступе лежат лекции и семинары по всем классам и по всем темам. Там же выложены подборки задач по темам. Уровень материалов позволяет хорошо подготовиться к муниципальному и региональному этапу Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Если вы школьник, просто пользуйтесь доступными материалами. Если вы преподаватель или сотрудник регионального органа образования, то МФТИ готов помочь организовать на базе вашей школы или центра по работе с талантливыми детьми кружок по физике. Занятия будут проходить по программе «Физтех-регионам», и МФТИ не берет никаких денег за эти материалы. Единственное, вам нужно будет обеспечить работу преподавателя. Подобным образом функционируют кружки уже в более чем 40 регионах России.

7 класс

Задача №1. Случай на эскалаторе

Экспериментатор Глюк и теоретик Баг одновременно ступили на параллельные эскалаторы в метро. Глюк едет сверху вниз, Баг — снизу вверх. Оба идут с постоянными скоростями по ходу движения. К моменту, когда друзья поравнялись, Глюк насчитал $N_1 = 144$ ступеньки, а Баг — $N_2 = 48$ ступенек.

1. Кто движется относительно эскалатора быстрее, Глюк или Баг, и во сколько раз?

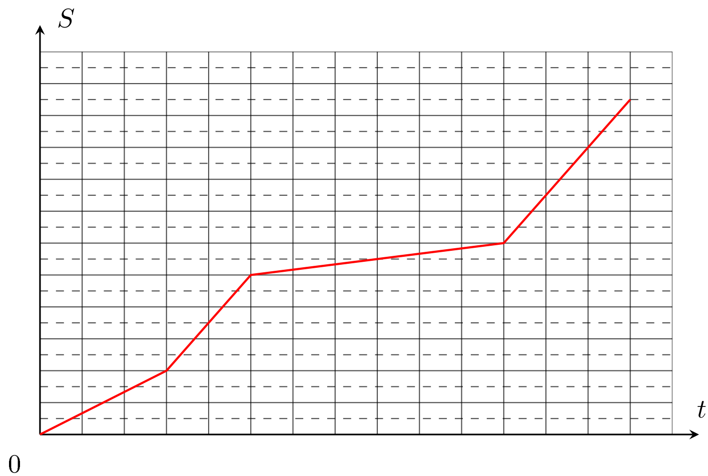
2. Сколько ступенек N_4 насчитает Баг за все время движения, если Глюк за время движения насчитал $N_3 = 216$ ступенек?

3. Какое количество N ступенек можно насчитать, если идти по стоящему эскалатору?

Эскалаторы имеют одинаковую длину и движутся с одинаковыми скоростями.

Задача №2. Средняя скорость

Семиклассник, совершая поездку на дачу, через равные малые промежутки времени записывал путь, пройденный автомобилем. По этим данным он построил график зависимости пути S автомобиля от времени t, который представлен на рисунке. Но начинающий экспериментатор забыл оцифровать оси пути и времени. При этом он точно помнит, что между моментами, когда средняя путевая скорость принимала максимальное и минимальное значения прошел ровно час, а средняя путевая скорость за последний час движения составила 50 км/ч.



Определите:

1. цену деления по оси t;
2. цену деления по оси S (между сплошной и пунктирной линиями);
3. время в пути;
4. расстояние от дома до дачи;
5. мгновенную скорость на 40-й минуте;
6. во сколько раз минимальная мгновенная скорость движения меньше мгновенной скорости движения на последнем участке;
7. среднюю скорость на середине пути.

Задача №3. Газировка

В ходе важного научного исследования был проведён опыт. В специальный стакан налили сладкую воду, после чего стали создавать в ней пузырьки газа. Постепенно увеличивая концентрацию пузырьков, исследователи фиксировали массу и объём газировки в стакане. Результат был занесён в таблицу:

Концентрация пузырьков, мм$^{-3}$	0	10	20	30
Масса, г	90	90	90	?
Объём, мл	90	99	110	110

Определите:

1. Плотность сладкой воды $\rho_{\text{В}}$
2. Объём стакана $V_{\text{С}}$
3. Объём одного пузырька V_0
4. К сожалению, значение массы в последнем столбце оказалось утеряно. Используя уцелевшие данные, восстановите его.

Считайте, что размеры пузырьков одинаковые.

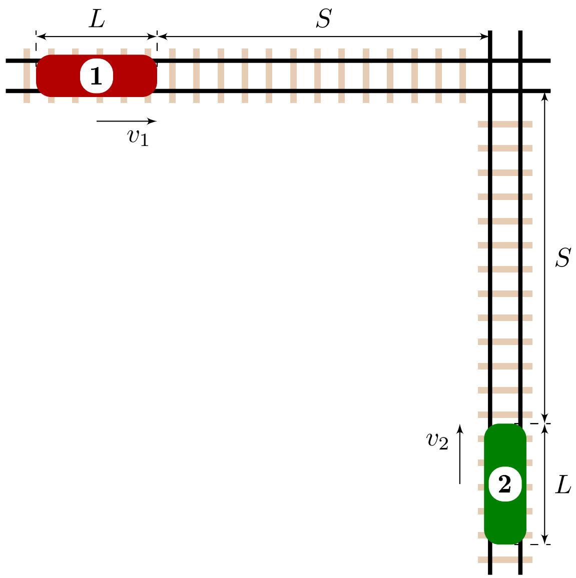
Примечание: концентрацией пузырьков n называют количество пузырьков в единице объёма.

Задача №4. Грешные приборы

Ни один реальный прибор не дает возможности провести измерения с совершенной точностью. Поэтому в физике вводится понятие абсолютной погрешности прибора (чаще всего ее обозначают Δ). Полученный результат измерений (назовем его A) следует понимать как интервал возможных значений. То есть, реальное значение R измеряемой величины может быть любым в интервале $A - \Delta \leqslant R \leqslant A + \Delta$.

Два грузовых поезда движутся с постоянными скоростями по пересекающимся железнодорожным путям в направлении перекрестка. При этом они оба находятся на расстоянии $S = 7$ км от перекрестка. Длина поездов одинакова: $L = 1$ км. Считайте, что S и L измерены с очень высокой точностью.

У локомотива первого поезда неисправен прибор для измерения скорости, поэтому машинист вынужден вычислять скорость, пользуясь подручными средствами. У него есть часы, которые позволяют измерить время с погрешностью $\Delta\tau = 2$ с. Также он может определять пройденное расстояние, ориентируясь по столбам, которые установлены через каждые $d = 200$ м вдоль путей, с погрешностью $\Delta d = 10$ м. Он замерил время прохождения между двумя соседними столбами и получил значение $\tau = 12$ с.



1. Исходя из данных, полученных машинистом первого поезда, определите, в каком диапазоне находится скорость его состава.

2. Какую скорость (в км/ч) должен показывать исправный спидометр второго поезда, имеющий погрешность $\Delta v = 1$ км/ч, чтобы на перекрестке гарантированно не произошло столкновение?

8 класс

Задача №1. Когда-то где-то

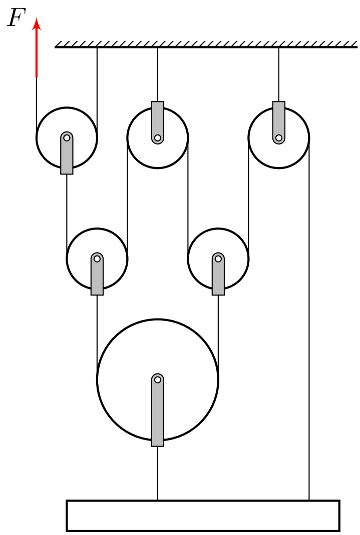
Когда-то где-то по прямому шоссе двигался равномерно автомобиль. Координаты автомобиля и моменты времени определял спутник GPS: иногда с погрешностью, иногда — точно. Известно, что через 1,5 минуты от начала наблюдения его координата была равна $(647{,}5 \pm 0{,}5)$ км, а через 3,5 минуты — $(649{,}5 \pm 0{,}5)$ км. Ещё известно, что в точке с координатой 648 км автомобиль был через $(2{,}25 \pm 0{,}25)$ минуты от начала наблюдения, а в точке с координатой 651 км через $(4{,}75 \pm 0{,}25)$ минуты. Определите:

1. максимально возможную и минимально возможную скорости автомобиля;
2. путь автомобиля за 3 минуты;
3. положение автомобиля через 3 минуты 15 с от начала наблюдения.

Задача №2. Выигрышные блоки

Для систем, состоящих из нитей, подвижных и неподвижных блоков, применяемых для подъёма грузов, можно ввести понятие выигрыша в силе k. Он показывает, во сколько раз сила тяжести груза массой M превышает силу F, необходимую для его равномерного подъёма, то есть $k = \frac{Mg}{F}$.

На рисунке представлена система, состоящая из нерастяжимых нитей пренебрежимо малой массы и шести блоков. Пусть данная система при равномерном подъеме груза массой M дает выигрыш в силе $k = 4$.



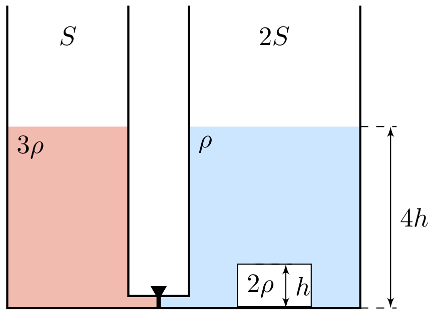
1. Какой выигрыш k_1 она даст при равномерном подъёме груза $M_1 = 3{,}5M$?

2. Какой максимальный выигрыш k_{max} в силе сможет дать такая система при равномерном подъеме груза?

3. Для каких масс грузов эта система может дать выигрыш в силе?

Трение в блоках отсутствует. Свободные участки нитей вертикальны. Два подвижных блока, расположенных на одной горизонтали одинаковы. Считайте, что сила натяжения каждой нити постоянна по всей ее длине.

Задача №3. Меж двух жидкостей



Два открытых вертикальных цилиндрических сосуда соединены тонкой трубкой с краном (см. рис.). В сосуде с площадью сечения S находится жидкость плотностью 3ρ, а в сосуде с площадью сечения $2S$ — жидкость плотностью ρ и шероховатый брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Высота бруска h, площадь основания S, плотность 2ρ. Высота столбов жидкости в сосудах одинакова и равна $4h$. Оба сосуда сверху открыты, жидкости не смешиваются, не сжимаются и не выливаются из сосуда. Объёмом соединительной трубки можете пренебречь. Кран открывают.

Определите высоту столбов жидкостей в каждом сосуде после того, как перетекание прекратится.

Задача №4. Тепловые шарики

В теплоизолированном сосуде находится $m_0 = 200$ г воды при температуре $t_0 = 20\,^\circ$C. В воду опускают шарик с теплоёмкостью $C_ш = 200$ Дж/°C с температурой $t_ш = 98\,^\circ$C. После установления теплового равновесия температура в сосуде оказывается равной $t_1 = 35\,^\circ$C. Когда в сосуд, не вынимая первый шарик, опустили второй точно такой же шарик с той же температурой $t_ш = 98\,^\circ$C, то температура в сосуде после установления теплового равновесия оказалась равной $t_2 = 47\,^\circ$C.

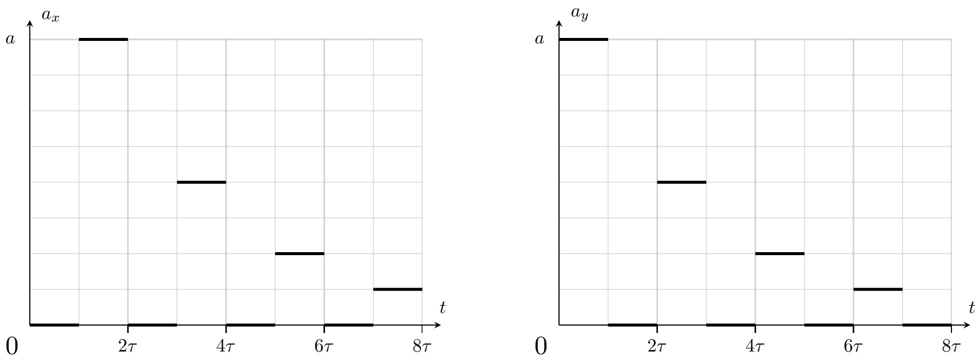
Не вынимая двух первых шариков, в сосуд помещают еще один точно такой же (начальная температура $t_ш = 98\,^\circ$C, теплоёмкость $C_ш = 200$ Дж/°C). Определите t_3 — температуру теплового равновесия в этом случае. Считать, что время опускания шарика в воду намного меньше времени установления теплового равновесия.

Удельная теплоёмкость воды равна $c_в = 4200$ Дж/(кг · °C), удельная теплоёмкость материала шариков равна $c = 500$ Дж/(кг · °C), плотность шариков равна $\rho_ш = 7800$ кг/м^3, плотность воды равна $\rho_0 = 1000$ кг/м^3. Теплоёмкостью сосуда можете пренебречь.

9 класс

Задача №1. Импульсное ускорение

Частица двигалась в плоскости Oxy в положительном направлении оси x с постоянной скоростью, параллельной оси x. В момент времени $t = 0$ на неё начала действовать переменная сила, лежащая в плоскости Oxy. Действие этой силы привело к возникновению ускорения, которое периодически изменяло своё направление. Модуль ускорения при $t = 0$ был равен a и через каждый промежуток времени 2τ уменьшался в 2 раза. На рисунке представлены графики зависимости проекций ускорения частицы от времени за некоторый начальный интервал времени.

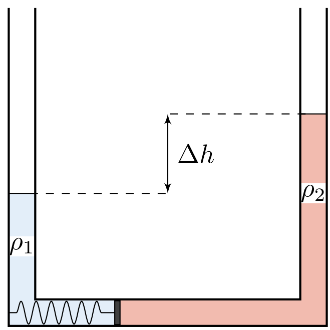


Считая известными a и τ, определите максимальную и минимальную (по модулю) скорости частицы, которая двигалась под действием этой силы в течение долгого времени. При этом скорость частицы отклонялась от первоначального направления движения на максимальный угол α.

Примечание: сумма бесконечной геометрической прогрессии $b + bq + bq^2 + bq^3 + \ldots = \sum\limits_{i=0}^{\infty} bq^i = \frac{b}{1-q}$, где $|q| < 1$.

Задача №2. Другой уровень

Тонкая трубка площадью поперечного сечения S изогнута в виде перевёрнутой буквы П (см. рисунок). В горизонтальной части трубки находится невесомый поршень, который связан с левой стенкой пружиной. В вертикальных концах трубки в равновесии находятся две жидкости: в левой — жидкость плотностью ρ_1, а в правой — жидкость плотностью $\rho_2 < \rho_1$.



При этом разность уровней верхних границ жидкостей в вертикальных коленах составляет Δh, а пружина находится в недеформированном состоянии. Коэффициент жёсткости k пружины подобран таким образом, чтобы при добавлении в левое колено жидкости плотностью ρ_1 разность уровней Δh всё время оставалась постоянной.

1. Чему равен коэффициент жёсткости k?

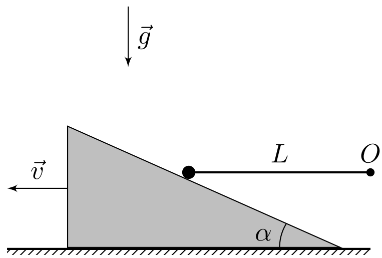
В левую часть трубки добавляют объём ΔV жидкости плотностью ρ_2, при этом верхние границы жидкостей в вертикальных частях оказываются на одном уровне.

2. Определите, какой объём ΔV добавили в левое колено?

Поршень скользит без трения. Жидкость между поршнем и стенками сосуда не подтекает и не выливается из сосуда. Объёмом пружины можно пренебречь, жидкости не смешиваются и не перетекают в другое вертикальное колено. Ускорение свободного падения равно g.

Задача №3. Не падать

Один конец невесомого жёсткого стержня длиной L с закреплённым на конце маленьким шариком массой m касается массивного клина с углом α при основании (см. рисунок). Другой конец стержня шарнирно закреплён в точке O. Систему удерживают в некотором положении, а затем отпускают. В момент, когда стержень горизонтален, шарик отрывается от клина.



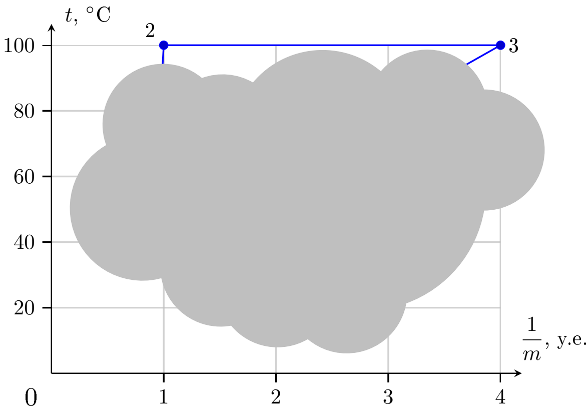
Найдите скорость v клина в этот момент.

Ускорение свободного падения g считайте известным. Трения в системе нет.

Задача №4. Тепловой цикл

Экспериментатор Глюк поставил на газовую плиту кастрюльку с водой. Вода имеет неизвестные начальные массу M и температуру t_1. Ненадолго отвлёкшись, он обнаружил, что большая часть воды уже выкипела. Глюк осознал, что процесс нагревания нужного количества воды придётся начинать сначала. Он выключил плиту, и с небольшим постоянным массовым расходом μ стал доливать в кастрюлю холодную воду температурой $t_х = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Когда масса воды в кастрюльке стала равна начальной, температура воды также оказалась равна начальной температуре.

Диаграмма зависимости температуры воды в кастрюле в течение эксперимента от величины, обратной к общей массе воды в кастрюле (см. рисунок), оказалось, представляет собой замкнутый цикл $1-2-3-1$, причём времена



кипения воды на участке $2-3$ и доливания холодной воды на участке $3-1$ одинаковые. После окончания эксперимента Глюк случайно пролил воду на график, поэтому точка 1, участки $1-2$ и $3-1$ на графике оказались не видны, а единицы измерения одной из осей потеряны.

1. Считая известным коэффициент полезного действия (КПД) газовой плиты $\eta = 0{,}5$, массовый расход газа $\mu_0 = 0{,}14$ г/с и удельную теплоту его сгорания $q = 33$ МДж/кг, определите полезную мощность плиты P. Здесь коэффициентом полезного действия называется отношение полезной мощности, поступающей к воде в кастрюле, к общей мощности, выделяющейся при сгорании газа.

2. Определите массовый расход холодной воды μ на участке $3-1$.

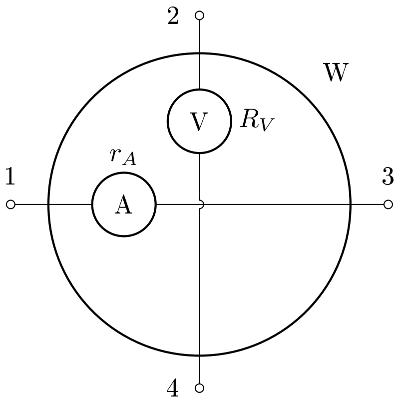
3. Определите температуру t_1 воды в точке 1. Восстановите вид всей диаграммы.

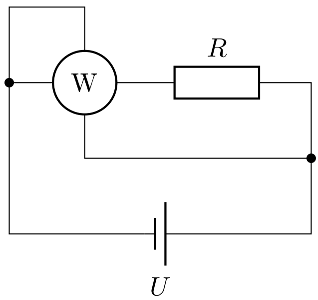
4. Во сколько раз время τ_{23}, в течение которого вода кипела на участке $2-3$ больше, чем время τ_{12} нагревания воды на участке $1-2$?

Тепловых потерь нет. Испарением на участках $1-2$ и $3-1$ и теплоёмкостью кастрюли пренебречь. Удельная теплота парообразования воды $L = 2{,}3$ МДж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °C), температура кипения воды $t_{100} = 100\,°\mathrm{C}$.

Задача №5. Whatметр

Экспериментатор Глюк нашёл на чердаке ваттметр и технический паспорт к нему. В паспорте была схема устройства ваттметра, приведённая на рисунке слева, а также было указано: «Ваттметр выводит на экран модуль произведения показаний амперметра и вольтметра, встроенных внутрь прибора. Контакты 1 и 3 подключены к амперметру с внутренним сопротивлением $r_A = 5$ Ом, а контакты 2 и 4 — к вольтметру с внутренним сопротивлением $R_V =$ ». К сожалению, от времени чернила выцвели, и Глюк не смог разобрать величину сопротивления вольтметра. Кроме того, на приборе не было видно подписей контактов.





Глюк, решив во всём разобраться, собрал цепь, схема которой изображена на рисунке справа. В цепь он включил идеальный источник постоянного напряжения и резистор сопротивлением $R = 500$ Ом. Ваттметр, подключённый к цепи, показал значение $P_1 = 100$ Вт. Затем Глюк вытащил ваттметр из цепи, повернул его на 90° и снова вставил в цепь. После этого прибор показал значение $P_2 = 1{,}0$ Вт. Изображение ваттметра на обеих схемах соответствует его внешнему виду.

1. Определите внутреннее сопротивление вольтметра R_V, считая, что оно больше сопротивления амперметра ($R_V > r_A$).

2. Можно ли, используя те же самые элементы, собрать цепь так, чтобы ваттметр показал значение P_3 в диапазоне от 5 мВт до 20 мВт? Ответ подтвердите расчётами и приведите либо доказательство невозможности, либо одну схему, удовлетворяющую интервалу.

10 класс

Задача №1. Исследовательский зонд

Исследовательский зонд, находящийся на круговой орбите радиуса R вокруг планеты Шелезяка, изучает движение Болтика — маленького спутника планеты. Орбита Болтика также является круговой с радиусом r ($r < R$) и лежит в той же плоскости, что и орбита зонда (см. рис. 1). В процессе наблюдения приборы зонда зафиксировали, что Болтик спустя $t_1 = 165$ мин после пересечения им видимого края диска планеты оказался на максимальном угловом расстоянии $\theta_{max} = 15^\circ$ от центра Шелезяки, а ещё спустя некоторое время, большее t_1, снова пересёк край видимого диска планеты. Известно, что между указанными пересечениями других пересечений Болтика с видимым краем планеты не было. Планета Шелезяка имеет форму шара и лишена атмосферы. Масса Болтика много меньше массы планеты, зонд и спутник обращаются вокруг планеты в одну и ту же сторону. Угловой диаметр планеты, наблюдаемый зондом, равен $2\theta_0 = 6^\circ$. Гравитационная постоянная равна $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

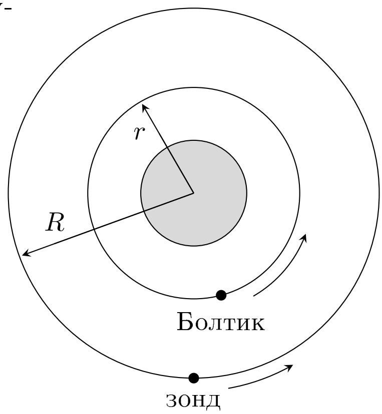


Рис. 1

1. Определите отношение R/r.
2. Чему равен период обращения зонда T вокруг Шелезяки?
3. Найдите среднюю плотность Шелезяки ρ.

Примечание:

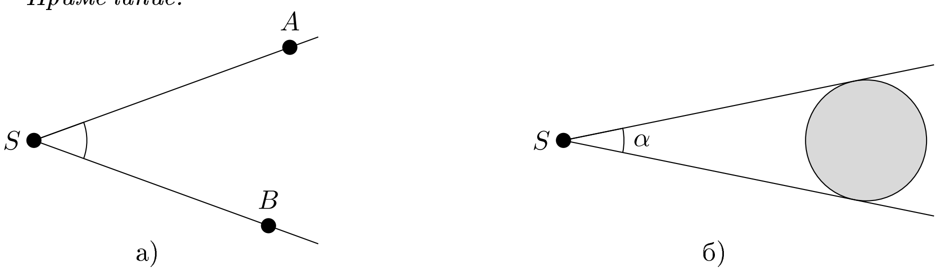


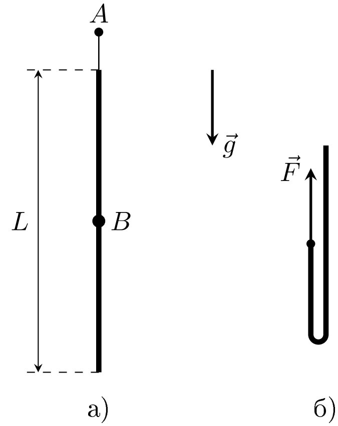
Рис. 2

1. *Угловым расстоянием* между точками A и B называется величина угла $\angle ASB$, на сторонах которого лежат рассматриваемые точки, а вершина S находится в точке наблюдения (см. рис. 2а).

2. *Угловым диаметром* астрономического объекта (например, звезды или планеты) называется величина максимально возможного угла α между двумя касательными к поверхности рассматриваемого объекта, вершина которого находится в точке наблюдения S (рис. 2б).

Задача №2. С ускорением

Идеально гибкая однородная нерастяжимая цепочка постоянной толщины, массой m и длиной L подвешена с помощью короткой нити к закреплённой точке A (рис. а). В некоторый момент времени нить пережигают, и цепочку начинают тянуть за её нижний конец с постоянной силой F в направлении точки A (рис. б).



1. С каким по модулю ускорением a_0 начнёт двигаться верхний конец цепочки сразу после пережигания нити?

2. Через какое время τ после пережигания нити вся цепочка снова выпрямится?

3. Определите модуль скорости цепочки v сразу после её распрямления.

4. Какое количество теплоты Q выделится за время τ?

5. Определите силу натяжения T цепочки в точке B, расположенной в её середине, после её распрямления.

Ускорение свободного падения g. Сопротивлением воздуха необходимо пренебречь. Размеры звеньев в цепочке много меньше её длины. Считайте, что столкновения звеньев в цепи неупругие.

Задача №3. Пузырёк чёрного курильщика

В океанах на большой глубине около срединно-океанических хребтов могут встречаться такие источники тепла, как чёрные курильщики. Они извергают геотермальную воду высокой температуры. После одного из таких выбросов в толще океана появился слой теплой воды, температура t в котором изменялась с глубиной h так, как показано на рисунке (представлен на отдельном листе).

Продукты выброса чёрных курильщиков также часто содержат различные газы, которые формируют пузырьки.

1. Найдите все возможные значения глубины, на которых пузырёк в воде будет находиться в равновесии.

2. Определите, являются ли найденные положения равновесия устойчивыми.

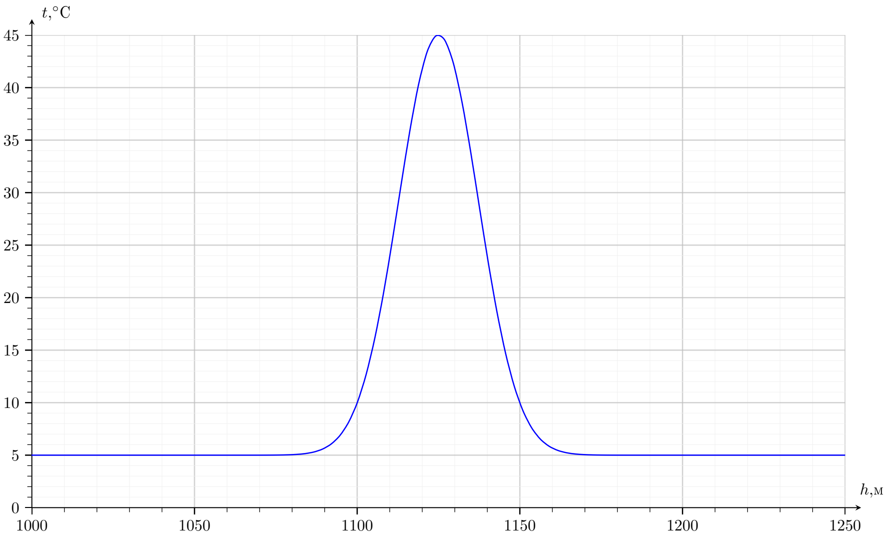
Считайте, что:

- течение в воде отсутствует, и она находится в состоянии покоя;

- пузырёк всегда имеет форму шара, и давление внутри него равно внешнему давлению воды;
- газ внутри пузырька можно считать идеальным;
- температура внутри пузырька равна температуре окружающей воды;
- газ не растворяется в воде.

Молярная масса газа $\mu = 222$ г/моль, плотность воды постоянна и равна $\rho_в = 1020$ кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль $\cdot$ К), ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

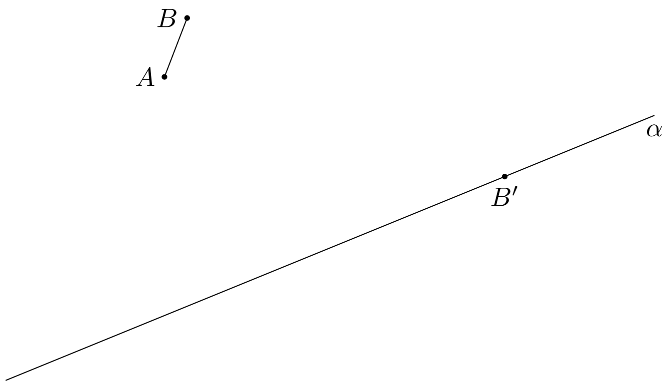
Примечание. При сдаче работы лист с рисунком вкладывается в решение участника.



Задача №4. Точно не Снеллиус?

Даны светящийся отрезок AB, точка B' — изображение точки B, создаваемое некоторой тонкой линзой, и прямая α, проходящая через точку B' (см. рисунок). Известно, что точка B' лежит в плоскости двойного фокуса линзы, а точка A' (изображение точки A) лежит на прямой α. Для всех возможных ситуаций с помощью циркуля и линейки без делений восстановите:

1. положение оптического центра линзы;
2. положение линзы и положение её главной оптической оси;
3. положение фокусов линзы;
4. положение точки A'.



На отдельном листе приведено два рисунка. Все построения выполняйте на этом листе, опишите их. Метод построения параллельных и перпендикулярных прямых, проходящих через заданную точку, деление отрезка пополам, откладывание равных отрезков и подобные стандартные геометрические процедуры описывать не обязательно.

Считайте, что данная линза любые лучи (даже непараксиальные) преломляет по тем же правилам, что и параксиальные. Параксиальный луч — это луч, идущий под малым углом к главной оптической оси линзы и на малом расстоянии от неё.

Примечание. При сдаче работы лист с рисунками вкладывается в решение участника.

Задача №5. Усилитель

В данной задаче рассматривается упрощённый принцип работы трёхконтактного элемента электрической цепи — *полевого транзистора.* Контакты данного элемента называются «исток», «сток» (имеется в виду исток и сток электронов) и «затвор» (см. рис. 1). При этом сила тока через затвор много меньше силы тока, текущего между стоком и истоком.

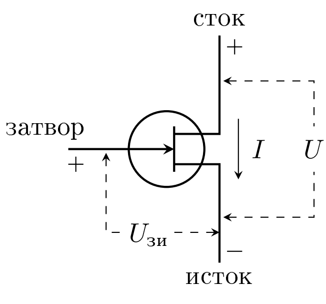


Рис. 1

Вольт-амперная характеристика транзистора, то есть зависимость силы тока I, текущего между стоком и истоком, от напряжения U между ними управляется напряжением $U_{зи}$, созданным между затвором и истоком (полярность подключения, соответствующая положительным значениям U и $U_{зи}$, указана на рис. 1).

В простейшей модели полевого транзистора его вольт-амперная характеристика описывается графиком, представленным на рис. 2а. При любых положительных напряжениях U между стоком и истоком через транзистор течёт постоянный ток $I_{\text{нас}}$, называемый током насыщения. Сила тока насыщения зависит от напряжения $U_{\text{зи}}$, созданного между затвором и истоком, так, как показано на рис. 2б.

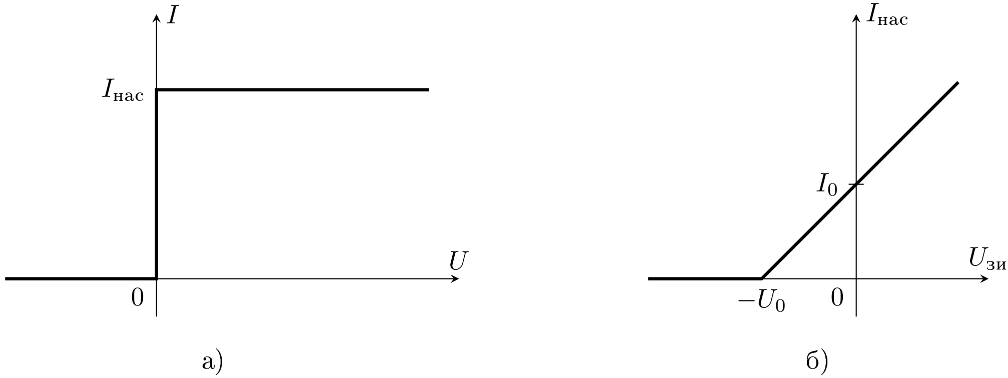


Рис. 2

На основе данного транзистора был собран простейший усилитель, то есть устройство, позволяющее увеличить амплитуду переменного напряжения. Схема такого устройства изображена на рис. 3 (буквами «с» и «и» отмечены, соответственно, сток и исток транзистора).

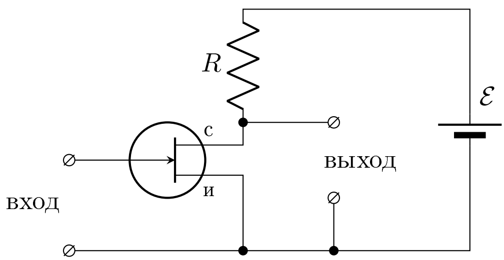


Рис. 3

На вход усилителя подают переменное напряжение синусоидальной формы с амплитудой U_a, зависимость $U_{\text{зи}}$ от времени t для которого представлена на рис. 4, и определяют напряжение $U(t)$ на выходе.

При решении задачи считайте известными параметры транзистора: $I_0 = 0{,}5$ А, $U_0 = 1$ В, напряжение батареи $\mathcal{E} = 10$ В, а также то, что батарея является идеальной.

Примечание: Амплитудой колебаний называется значение максимального отклонения исследуемой величины от её среднего значения.

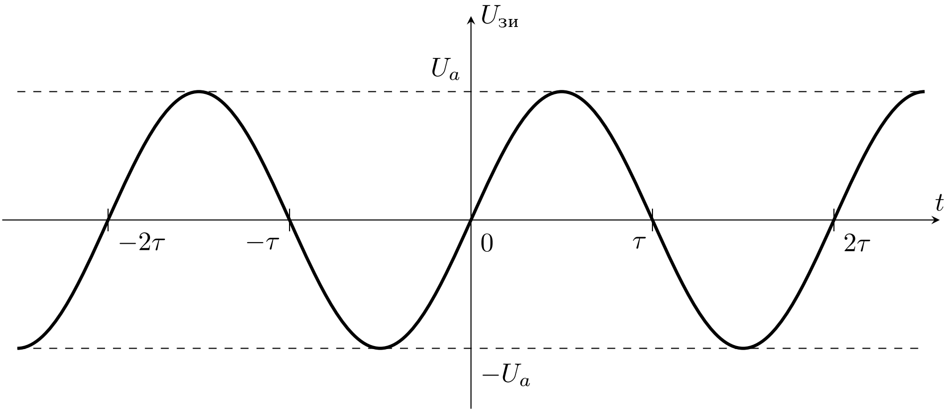


Рис. 4

1. При каких значениях U_a зависимость напряжения U на выходе усилителя от времени будет иметь форму синусоиды, если сопротивление резистора равно: а) $R = 5$ Ом; б) $R = 16$ Ом?

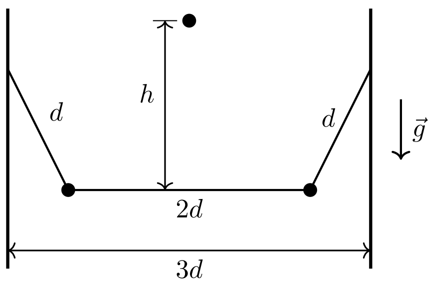
2. Определите коэффициент усиления K, то есть отношение амплитуды напряжения на выходе усилителя к амплитуде напряжения на входе, если $R = 5$ Ом, и сигнал на входе усилителя имеет синусоидальную форму.

3. Постройте график зависимости выходного напряжения U от времени t, если $U_a = 2$ В и $R = 8$ Ом. Отметьте на графике его основные особенности, укажите ключевые значения напряжений.

11 класс

Задача №1. Зацепился

Два маленьких тяжелых шарика массами m закреплены с помощью трех невесомых, нерастяжимых нитей между двумя вертикальными стенками в поле тяжести. Расстояние между стенками $3d$, длины нитей, прикрепленных к стенкам равны d, длина нити между шариками $2d$. С высоты h, отсчитывая от середины горизонтальной нити, падает еще один такой же шарик, к которому прикреплен крючок. Пролетая рядом с горизонтальной нитью, шарик зацепляется за нить крючком. Определите силы натяжения нитей в этот момент. Ускорение свободного падения равно g.



Задача №2. Больше или меньше

Рассмотрим два процесса A и B, в каждом из которых ν молей одноатомного идеального газа квазистатически переводят из состояния 1 с объёмом V и температурой T в состояние 2 с объёмом $2V$ и температурой $2T$ так, что в течение всего процесса температура газа не уменьшается и тепло от газа не отводится. При этом процесс A осуществляется таким образом, что количество теплоты, которое подводят к газу, оказывается максимально возможным при выполнении данных условий, а в процессе B количество теплоты оказывается минимальным. Определите:

1. максимальные $V_A^{\max}$, $V_B^{\max}$ и минимальные $V_A^{\min}$, $V_B^{\min}$ значения объёмов газа в каждом из этих процессов,
2. количество теплоты Q_A и Q_B, подведенное в каждом процессе.

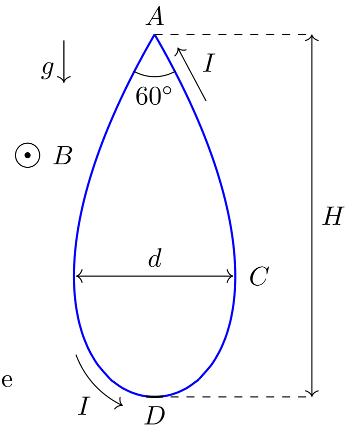
Задача №3. Зарядка аккумулятора

Иногда электродвигатель можно использовать в качестве генератора напряжения. Рассмотрим в качестве примера электродвигатель, в котором магнитное поле создается постоянным магнитом статора, и тогда при совершении работы по вращению в этом поле ротора двигателя в нем создается ЭДС индукции. Будем поддерживать вращение ротора за счет натяжения легкого нерастяжимого троса с массивным грузом, который плавно (и практически равномерно) опускается с некоторой высоты H. Отметим, что в таком режиме сила тока в обмотке ротора прямо пропорциональна силе натяжения троса. Возникшая ЭДС используется для зарядки аккумулятора, заряд которого увеличивается на величину $Q_1 = 300$ мА $\cdot$ час. Если подключить этот аккумулятор к двум таким же параллельно соединенным электродвигателям, и опустить тот же груз с той же высоты на двух одинаково нагруженных тросах, каждый из которых вращает ротор одного из электродвигателей, то приобретаемый заряд станет равным $Q_2 = 400$ мА $\cdot$ час.

1. Во сколько раз отличается время зарядки в первом и втором случае?
2. Во сколько раз сила тока зарядки аккумулятора в первом и втором случае отличается от силы тока в цепи ротора одного электродвигателя с закрепленным неподвижно ротором при подключении его к этому аккумулятору?
3. Какой заряд приобретет аккумулятор, если аналогичным образом использовать для его зарядки три таких электродвигателя?

Изменением ЭДС аккумулятора в процессе зарядки, внутренним сопротивлением аккумулятора и действием на груз сил сопротивления воздуха пренебречь.

Задача №4. Петля с током



В горизонтальном однородном магнитном поле индукции B висит гибкая проводящая нить длины L, по которой течёт ток I. Оба конца нити подвешены практически к одной и той же точке A. В равновесном положении эти концы образуют друг с другом угол $\alpha = 60°$, а расстояние между точкой подвеса и самой нижней точкой нити равно $H = L\sqrt{3}/4$ (см. рис.). Ускорение свободного падения равно g. Собственным магнитным полем тока можно пренебречь. Нить является однородной.

1. Найдите массу нити m и силу натяжения нити T_D в её нижней точке (точка D на рисунке).

2. Определите силу натяжения нити T_C в её крайне правой точке (точка C на рисунке).

3. Найдите расстояние d между крайне левой и крайне правой точкой висящей нити.

Задача №5. Я надел свои очки

Часто на портретных фотографиях, сделанных с помощью камеры смартфона (рис. 1), в отражении очков фотографирующего можно увидеть изображение его смартфона. Определите по фотографии ниже радиус кривизны поверхности очков, оцените погрешность измерений. Считайте, что расстояние между смартфоном и очками известно точно и равно $L = 50$ см. На рис. 2 изображены смартфон и очки, лежащие рядом друг с другом. Длины, необходимые для получения числового ответа в задаче, можно измерить с помощью линейки по фотографиям из условия.

Рис. 1. Портретная фотография, сделанная с помощью смартфона.

Рис. 2. Очки и смартфон рядом друг с другом.

Возможные решения

Задача №7-Т1. Случай на эскалаторе

Для упрощения формул договоримся при решении задачи пользоваться несистемными единицами измерения:

- ступеньками для измерения пути;
- ступеньками в секунду для измерения скорости.

К моменту встречи друзья шли по эскалаторам одинаковое время, поэтому отношение пройденных ими путей — это отношение их скоростей. Значит Глюк идет быстрее. Обозначим скорость Бага — v, тогда скорость Глюка в 3 раза больше — $\frac{N_1 v}{N_2} = 3v$. Также введем обозначение для скорости эскалатора — u и для времени, прошедшего с начала движения до момента встречи друзей — t.

Способ 1 . Полное время движения Глюка по эскалатору $t_{\text{г}} = \frac{N_3}{N_1}\ t = \frac{3}{2}t$.

Выразим число ступенек эскалатора двумя разными способами. К моменту встречи Глюк прошел путь N_1, Баг — N_2, а эскалаторы каждого из друзей успели переместить их на ut, значит:

$$N = N_1 + N_2 + 2ut$$

С другой стороны, когда Глюк дошел до конца эскалатора, он преодолел расстояние N_3, а его эскалатор успел сместить ступеньку, с которой экспериментатор начинал движение, на $\frac{3}{2}ut$, тогда:

$$N = N_3 + \frac{3}{2}ut$$

Приравнивая правые части формул, получим:

$$N_1 + N_2 + 2ut = N_3 + \frac{3}{2}ut$$

Откуда $ut = 2(N_3 - N_1 - N_2) = 48$ ступенек. То есть скорость эскалатора в точности равна скорости Бага ($u = v$).

Подставляя полученное значение в любое из выражений для N, получим $N = 4N_3 - 3N_1 - 3N_2 = 288$ ступенек.

За все время движения Баг насчитает

$$N_4 = \frac{Nv}{v+u} = \frac{Nv}{2v} = \frac{N}{2} = 144 \text{ ступеньки.}$$

Способ 2. Путь, пройденный Глюком относительно своего эскалатора до момента встречи:

$$3vt = N_1$$

Путь, пройденный Багом относительно своего эскалатора до момента встречи:

$$vt = N_2$$

Полный путь, пройденный Глюком относительно своего эскалатора:

$$3vt_г = N_3$$

Отсюда $t_г = N_3t/N_1 = 3t/2$.

По условию длина эскалатора, с одной стороны, равна сумме расстояний относительно Земли, пройденных Глюком и Багом до встречи, а с другой стороны, равна расстоянию относительно Земли, пройденному Глюком при спуске по всему эскалатору целиком:

$$N = (3v + u)t + (v + u)t;$$

$$N = (3v + u)t_г.$$

Приравнивая правые части и подставляя $t_г = 3t/2$, получаем, что $u = v$. Тогда:

$$N = (3v + v)t + (v + v)t = 6vt = 6N_2 = 288 \text{ ступенек}$$

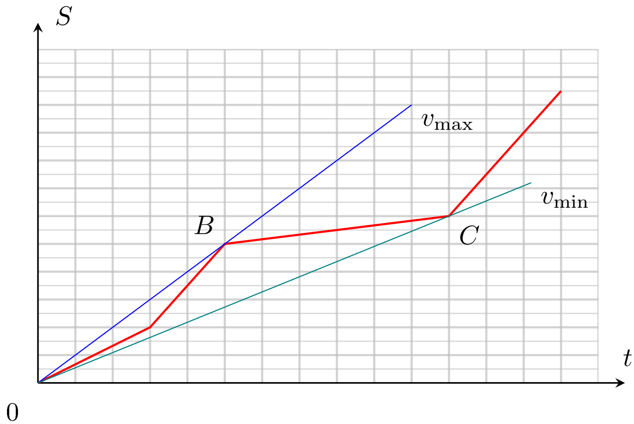
Баг поднимался по эскалатору в течение времени $t_Б = N/(v + u)$. За это время он насчитает:

$$N_4 = \frac{Nv}{(v+u)} = \frac{Nv}{2v} = \frac{N}{2} = 144 \text{ ступеньки}$$

Всего на эскалаторе $N = 288$ ступенек.

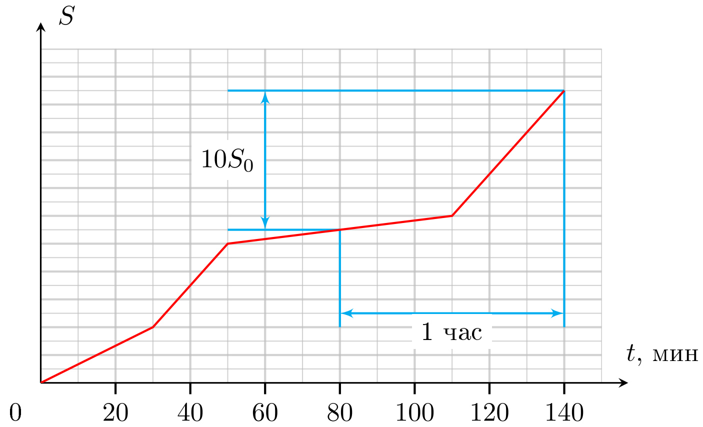
Задача №7-Т2. Средняя скорость

Для определения минимальной и максимальной средних скоростей проведём касательные к графику из начала координат. Та, что составляет с осью времени наибольший угол (прямая OB), определяет максимальную среднюю скорость v_{max}. Касательная, которая составляет с осью времени наименьший угол (прямая OC), определяет минимальную среднюю скорость v_{min}.



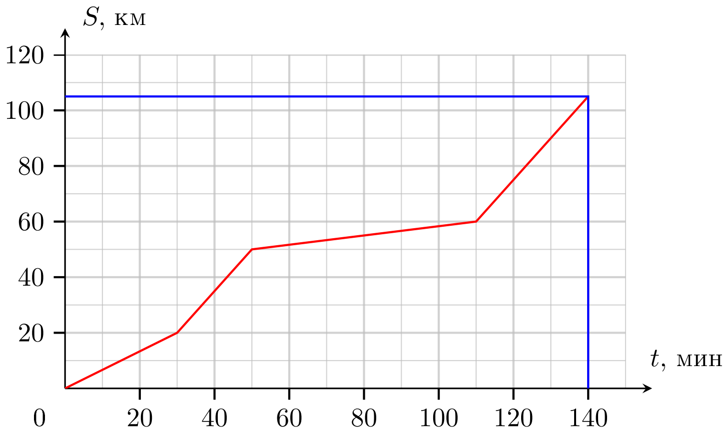
По условию задачи между двумя этими моментами прошел 1 час, следовательно, цена деления по оси времени — 10 минут.

Пусть цена деления по оси пути составляет S_0. По графику определим путь, пройденный за последний час движения. Он равен $10S_0$.



Так как средняя скорость за последний час равна 50 км/ч получаем, что цена деления $S_0 = 5$ км.

Таким образом, восстановлена оцифровка по обеим осям и можно ответить на 3-й и 4-й вопросы.



Время движения до дачи — 140 минут (2 часа 20 минут)

Расстояние до дачи — 105 км.

Определим мгновенные скорости на всех участках движения. Первые 30 минут автомобиль ехал со скоростью $v_1 = \frac{20\ \text{км}}{30\ \text{мин}} = \frac{20\ \text{км}}{0{,}5\ \text{ч}} = 40$ км/ч. Следующие 20 минут (1/3 часа) он двигался со скоростью $v_2 = \frac{(50-20)\ \text{км}}{20\ \text{мин}} = \frac{30\ \text{км}}{1/3\ \text{ч}} = 90$ км/ч.

Далее за 60 минут (1 час) автомобиль проехал 10 км, поэтому его скорость равна $v_3 = 10$ км/ч. Последние 30 минут (полчаса) автомобиль двигался со скоростью 90 км/ч.

Так как 40 минут попадает на второй участок, то мгновенная скорость на 40-ой минуте равна 90 км/ч.

Минимальна скорость движения на третьем участке. Отношение скорости движения на четвёртом участке к минимальной скорости движения равно 9.

Определим среднюю скорость на середине пути. Половина пути составляет 52,5 км. Этот участок пути состоит из первого участка (путь 20 км, время движения 30 минут), второго участка (путь 30 км, время движения 20 минут), от третьего участка нужно добавить 2,5 км, которые автомобиль прошел со скоростью 10 км/ч, таким образом средняя скорость на первой половине пути равна

$$v_{\frac{1}{2}} = \frac{52{,}5 \text{ км}}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2{,}5}{10}\right) \text{ ч}} = 48{,}5 \text{ км/ч}.$$

Средняя скорость на первой половине пути равна $v_{\frac{1}{2}} = 48{,}5$ км/ч.

Задача №7-Т3. Газировка

Плотность сладкой воды найдём из первого столбца с данными:

$$\rho_{\text{В}} = \frac{m_1}{V_1} = 1\frac{\text{г}}{\text{мл}}.$$

Из-за наличия пузырьков жидкость увеличивается в объёме. Но в 3-м и 4-м столбцах её объём одинаков. Значит, газировка начала выливаться из стакана, объём которого $V_{\text{С}} = 110$ мл.

Способ 1. Определим, как связана средняя плотность газированной жидкости ρ с концентрацией пузырьков n. По определению:

$$\rho = \frac{m_{\text{Ж}}}{V_{\text{Ж}}} = \frac{m_{\text{В}}}{V_{\text{Ж}}} = \frac{\rho_{\text{В}}(V_{\text{Ж}} - V_{\text{П}})}{V_{\text{Ж}}},$$

где $m_{\text{Ж}}$ — масса «газировки», $V_{\text{Ж}}$ — её объём, $m_{\text{В}}$ — масса сладкой воды (массой пузырей пренебрегаем), $V_{\text{П}}$ — объём всех пузырьков.

$$\rho = \frac{\rho_{\text{В}}(V_{\text{Ж}} - NV_0)}{V_{\text{Ж}}} = \rho_{\text{В}}(1 - nV_0) \tag{1}$$

где V_0 — объём одного пузыря, а N — количество пузырьков. Применим формулу (1) ко 2-му столбцу с данными:

$$\frac{m_2}{V_2} = \rho_{\text{В}}(1 - n_2V_0) \Rightarrow V_0 = \frac{1}{n_2}\left(1 - \frac{m_2}{V_2\rho_{\text{В}}}\right) = \frac{1}{11n_2} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^3 = 0{,}009 \text{ мм}^3$$

Способ 2. Объём жидкости можно представить как $V_Ж = V_В + NV_0$, где N — количество пузырьков.

По определению концентрация пузырьков $n = \frac{N}{V_Ж}$. Тогда:

$$V_Ж = V_В + nV_Ж V_0.$$

Отсюда выражаем объём одного пузырька:

$$V_0 = \frac{V_Ж - V_В}{nV_Ж}.$$

Используя данные 2-го столбца, получаем:

$$V_0 = \frac{99\ \text{см}^3\ - 90\ \text{см}^3}{10\ \text{мм}^{-3}\ \cdot 99\ \text{см}^3} = \frac{1}{110}\ \text{мм}^3 \approx 0{,}009\ \text{мм}^3$$

.

Способ 1. Плотность газировки в 4-м столбце:

$$\rho_4 = \rho_В(1 - n_4V_0) = \rho_В(1 - 3n_2\frac{1}{11n_2}) = \frac{8}{11}\rho_В.$$

Масса в таблице

$$m_4 = \rho_4 V_4 = \frac{8}{11}\frac{m_1}{V_1}\cdot\frac{11}{9}V_1 = \frac{8}{9}m_1 = 80\ \text{г}.$$

Способ 2. Посчитаем объем жидкости при 4-м измерении, используя ранее выведенную формулу связи между объемами:

$$V'_В = V_С - nVV_0 = 110\ \text{см}^3 - 30\ \text{мм}^{-3}\cdot 110\ \text{см}^3\ \cdot\frac{1}{110}\ \text{мм}^3 = 80\ \text{см}^3.$$

Тогда масса воды: $m_4 = \rho_В V'_В = 80$ г.

Задача №7-Т4. Грешные приборы

По замерам машиниста определим максимальную и минимальную возможную скорость первого поезда.

$$v_{1max} = \frac{d + \Delta d}{\tau - \Delta\tau} = 21\ \text{м/с} = 75{,}60\ \text{км/ч} \approx 76\ \text{км/ч}$$

$$v_{1min} = \frac{d - \Delta d}{\tau + \Delta\tau} \approx 13{,}57\ \text{м/с} \approx 48{,}86\ \text{км/ч} \approx 49\ \text{км/ч}$$

Для того, чтобы поезда не столкнулись, должно выполняться одно из двух условий:

- К моменту подхода первого поезда к перекрестку второй уже успел проехать;
- К моменту подхода второго поезда к перекрестку первый уже успел проехать.

Первое условие можно записать так:

$$\frac{S}{v_{1max}} > \frac{S+L}{v_2},$$

откуда:

$$v_2 > \frac{S+L}{S} v_{1max}.$$

Второе условие можно записать так:

$$\frac{S+L}{v_{1min}} < \frac{S}{v_2},$$

откуда:

$$v_2 < \frac{S}{S+L} v_{1min}.$$

С учетом погрешности спидометра:

$$v_2 - \Delta v > \frac{S+L}{S} v_{1max}$$

$$v_2 + \Delta v < \frac{S}{S+L} v_{1min}$$

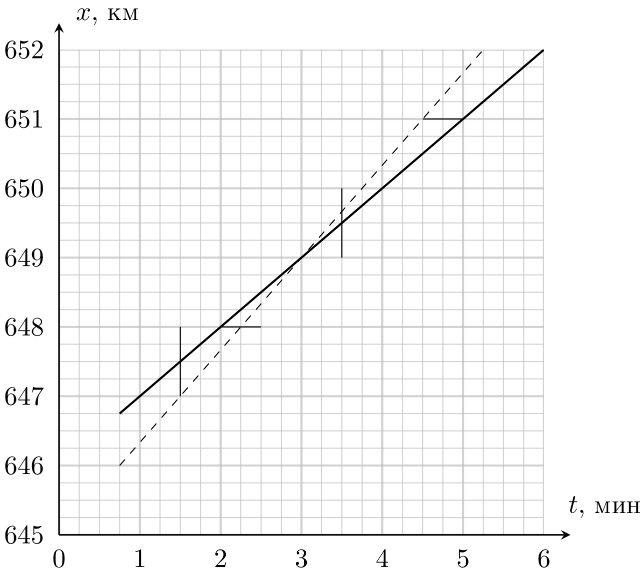
Учтем, что спидометр показывает скорость в км/ч. Подставим числовые значения, и получим, что условию задачи будут удовлетворять все v_2, которые либо меньше 41,75 км/ч, либо больше 87,40 км/ч.

Задача №8-Т1. Когда-то где-то

Отметим интервалы из условия задачи на координатной плоскости $x(t)$. Т.к. движение автомобиля равномерное, зависимость его координаты от времени — это линейная функция, графиком которой является прямая. Построим две прямые, пересекающие все интервалы с максимально возможным угловым коэффициентом (пунктирная линия) и минимально возможным угловым коэффициентом (сплошная линия).

Угловыми коэффициентами прямых являются скорости движения автомобиля:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



Определим интервал возможных скоростей:

$$v_{max} = \frac{650\ \text{км} - 647\ \text{км}}{2{,}25\ \text{мин}} = 80\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

$$v_{min} = \frac{650\ \text{км} - 648\ \text{км}}{2\ \text{мин}} = 60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

Возможно аналитическое нахождение предельно возможных скоростей, но оно громоздко и здесь не приводится.

Путь автомобиля определяем по формуле $l = vt$.

$$l_{max} = 80\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{3}{60}\ \text{ч} = 4\ \text{км}$$

$$l_{min} = 60\ \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{3}{60}\ \text{ч} = 3\ \text{км}$$

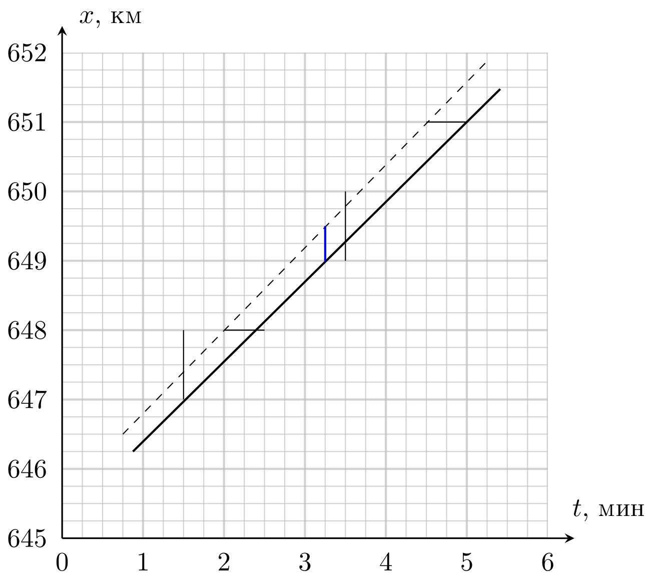
Ответ можно записать несколькими способами. Например:

$$3\ \text{км} \leqslant l \leqslant 4\ \text{км}$$

$$l \in [3\ \text{км}; 4\ \text{км}]$$

$$l = (3{,}50{,}5)\ \text{км}$$

Ответ на последний вопрос тоже можно получить двумя способами. Рассмотрим графическое решение. Построим две прямые, проходящие через все интервалы и ограничивающие максимально длинный отрезок координат в момент времени 3,25 минуты от начала наблюдения.



Видим, что верхняя точка необходимого нам отрезка, лежащая на пунктирной прямой, является серединой отрезка с координатами (2 мин; 648 км) и (4,5 мин; 651 км). Значит её координаты (3,25 мин; 649,5 км). Аналогично, нижняя точка необходимого нам отрезка, лежащая на сплошной прямой, является серединой отрезка с координатами (1,5 мин; 647 км) и (5 мин; 65 км). Значит её координата (3,25 мин; 649 км). Тогда координата автомобиля в момент 3,25 минуты:

$$649\text{ км} \leqslant x \leqslant 649{,}5\text{ км}$$

$$x \in [649\text{ км}; 649{,}5\text{ км}]$$

$$x = (649{,}25 \pm 0{,}25)\text{ км}$$

Рассмотрим пример аналитического решения. По двум точкам можно получить уравнения прямых, ограничивающих отрезок координат автомобиля в указанный момент времени:

$$x_{\text{пунк}} = 645{,}6 + 1{,}2t$$

$$x_{\text{сплош}} = \frac{4517}{7} + \frac{8}{7}t$$

Величины в уравнениях записаны в км и мин. Подставляя в уравнения момент времени 3,25 мин, получаем границы интервала координат: 649,5 км и 649 км.

Задача №8-Т2. Выигрышные блоки

В идеальной системе блоки имеют пренебрежимо малую массу, для такой системы выигрыш в силе всегда будет одинаковым. Для весомых блоков этот выигрыш является предельным, максимальным, почти достижимым при очень тяжелых грузах, масса которых много больше масс блоков. Распределение сил натяжения нитей в идеальной системе представлено на рис. 1, условие равномерного подъема груза имеет вид

$$10F = Mg$$

Отсюда выигрыш в силе для данной системы равен

$$k_{max} = \frac{Mg}{F} = 10$$

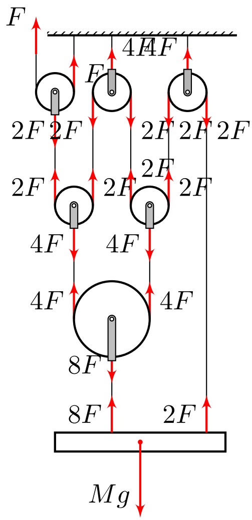


Рис. 1

В системе, дающей выигрыш в силе в $k = 4$ раза блоки имеют массу, причем в условии не сказано, что блоки одинаковы, поэтому будем решать задачу с блоками различных масс. Введем массы блоков, обозначив их m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 и m_6. Определим силы натяжения нитей в этом случае, записав условия равномерного поступательного движения блоков по вертикали.

Для блока m_1

$$2F = T_1 + m_1 g \qquad (1)$$

Отсюда определим силу натяжения нити $T_1 = 2F - m_1 g$. Для блока m_4

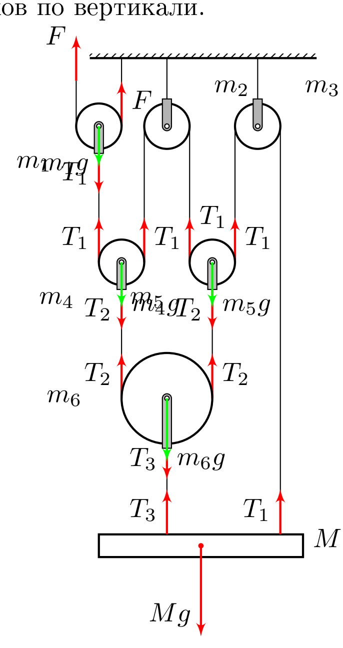
$$2T_1 = T_2 + m_4 g \qquad (2)$$

Отсюда определим силу натяжения нити $T_2 = 2T_1 - m_4 g = 4F - 2m_1 g - m_4 g$. Для блока m_5 уравнение будет таким же, так как по условию массы пятого и четвёртого блоков одинаковы. Для блока m_6

$$2T_2 = T_3 + m_6 g \qquad (3)$$

Отсюда определим силу натяжения нити

$$T_3 = 2T_2 - m_6 g = 8F - 4m_1 g - 2m_4 g - m_6 g.$$



Условие равномерного подъёма груза M

$$T_3 + T_1 = Mg \tag{4}$$

Подставив T_3 и T_1 получим

$$10F - 5m_1g - 2m_4g - m_6g = Mg \tag{5}$$

По условию задачи $F = \frac{Mg}{k}$, где $k = 4$. Тогда

$$10\frac{Mg}{k} - 5m_1g - 2m_4g - m_6g = Mg$$

$$\frac{10-k}{k}M = 5m_1 + 2m_4 + m_6 \tag{6}$$

Так как $k = 4$, то

$$3/2M = 5m_1 + 2m_4 + m_6 \tag{7}$$

Рассмотрим равномерный подъём груза массой $M_1 = 3{,}5M$ и определим выигрыш в силе k_1. Обозначим силу, которую необходимо прикладывать к свободному концу верхней верёвки F_1. Условие равномерного подъёма этого груза можно записать так:

$$10F_1 - 5m_1g - 2m_4g - m_6g = M_1g \tag{8}$$

Из (6) получаем:

$$10F_1 - \frac{10-k}{k}Mg = M_1g \tag{9}$$

Из записанного выражения определим отношение $\frac{F_1}{M_1g}$ (обратное k_1)

$$\frac{F_1}{M_1g} = \frac{10-k}{k}\cdot\frac{M}{M_1} + \frac{1}{10} = \frac{3}{2}\cdot\frac{M}{M_1} + \frac{1}{10}$$

Как видно, эта величина становится минимальной при очень больших массах груза, при $M_1 \gg M$, и в этом случае отношение $\frac{F_1}{M_1g}$ минимально и равно $\frac{1}{10}$. Значит $k_{max} = 10$, как это и было ясно из общего анализа в начале решения. При рассмотрении подъема груза $M_1 = 3{,}5M$ можно получить, что сила F_1, необходимая для его равномерного подъёма, равна

$$F_1 = 0{,}5Mg \tag{10}$$

Тогда выигрыш в силе рассчитывается так

$$k_1 = \frac{M_1g}{F_1} = \frac{3{,}5Mg}{0{,}5Mg} = 7 \tag{11}$$

Определим массу груза M_0, для которой не будет выигрыша в силе. В этом случае сила, необходимая для его равномерного подъёма, равна $F_0 = M_0 g$. Запишем условие равномерного подъёма груза с учетом (6) или (7)

$$10M_0 g - \frac{10-k}{k} Mg = M_0 g \tag{12}$$

или

$$10M_0 g - \frac{3}{2} Mg = M_0 g \tag{12}$$

Тогда масса груза, для которой не будет выигрыша в силе, равна

$$M_0 = \frac{10-k}{k} M$$

$$M_0 = \frac{M}{6}$$

Задача №8-Т3. Меж двух жидкостей

Определим объемы жидкостей и массу тела. Объем жидкости с плотностью 3ρ равен

$$V_1 = 4hS$$

Объем жидкости с плотностью ρ равен

$$V_2 = 4h \cdot 2S - hS = 7hS$$

Масса бруска равна

$$m = 2\rho hS$$

Определим давление жидкостей вблизи дна в левом и правом сосудах до открывания крана

$$p_{\text{лев}} = p_0 + 12\rho gh$$

$$p_{\text{прав}} = p_0 + 4\rho gh$$

Здесь p_0 — атмосферное давление. Так как давление в сосуде больше, после открытия крана жидкость плотностью 3ρ будет перетекать из левого сосуда в правый.

В нижней части правого сосуда будет увеличиваться слой жидкости, плотность которой больше плотности бруска, поэтому брусок начнет всплывать. Определим, при каком слое жидкости плотностью 3ρ это произойдет. Высоту слоя обозначим h_x. В момент всплытия сила тяжести равна силе Архимеда, поэтому

$$2\rho ghS = F_{\text{Арх}}$$

Далее в задаче следует найти высоту h_x, убедиться, что давления в левом и правом сосудах будут разными, перетекание жидкости с плотностью 3ρ продолжится, определить высоту столбов жидкостей в сосудах, при которых перетекание прекратится. Сделать это можно различными способами, разберем некоторые из них.

Способ 1. Воспользуемся тем, что выталкивающая сила Архимеда численно равна весу однородной жидкости, имеющей объем тела и плотность равную средней плотности смеси жидкостей, в которых тело находится. То есть:

$$F_{\text{Арх}} = \rho_{cp}\, gSh$$

Тогда:

$$\rho_{cp} = 2\rho$$

Определим, в каком отношении жидкости с плотностями ρ и 3ρ должны заполнить объем Sh, чтобы средняя плотность смеси была равна 2ρ

$$2\rho = \frac{\rho(h-h_x)S + 3\rho h_x S}{Sh} = \rho(1 + 2\frac{h_x}{h})$$

$$h_x = \frac{h}{2}$$

Этот результат можно было получить и более простым способом. Для того, чтобы жидкость в каком-то объёме имела среднюю плотность, равную среднему арифметическому двух несмешивающихся жидкостей (2ρ это среднее арифметическое ρ и 3ρ), налитых в этот объем, жидкости нужно смешать в равных объёмах.

Теперь определим высоты столбов жидкостей в левом и правом сосудах в момент начала всплытия бруска.

Из левого колена в правое перешел объем жидкости с плотностью 3ρ, равный $(2S - S)\cdot\frac{h}{2} = S\frac{h}{2}$, а так как площадь поперечного сечения левого колена S, то уровень в нём понизился на $\frac{h}{2}$ и стал равным $4h - \frac{h}{2} = 3{,}5h$.

Высота столба жидкости с плотностью ρ в правом колене — это $h' + \frac{h}{2}$. Здесь h' определяется из условия неизменности объёма жидкости ρ

$$7hS = 2Sh' + S\frac{h}{2}$$

$$h' = \frac{13}{4}h$$

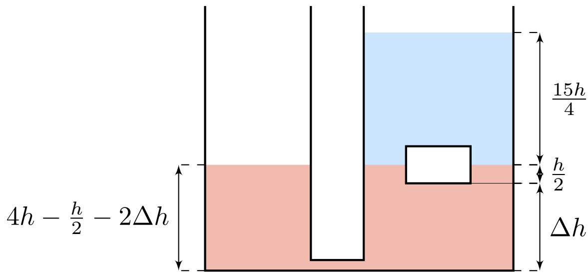
Таким образом высота столба жидкости плотностью ρ в правом колене равна $h' + \frac{h}{2} = \frac{15}{4}h$. Далее высота столба жидкости с плотностью ρ в правом колене меняться не будет.

Определим, чему равны давления вблизи дна левого и правого сосудов.

$$p'_{\text{лев}} = p_0 + 3\rho g\frac{7}{2}h = p_0 + \frac{21}{2}\rho gh$$

$$p'_{\text{прав}} = p_0 + \rho g\frac{15}{4}h + 3\rho g\frac{h}{2} = p_0 + \frac{21}{4}\rho gh$$

Так как давление в левом сосуде больше, перетекание продолжится.



Определим, сколько еще жидкости с плотностью 3ρ должно перетечь в правый сосуд, чтобы давления в левом и правом коленах вблизи дна выровнялись. Пусть высота этого дополнительного столбика жидкости в правом колене равна Δh. Тогда из левого колена должно уйти $2\Delta h$, так как его площадь в два раза меньше. Давление в левом колене равно

$$p''_{\text{лев}} = p_0 + 3\rho g(\frac{7}{2}h - 2\Delta h)$$

Давление в правом колене равно

$$p''_{\text{прав}} = p_0 + \rho g\frac{15}{4}h + 3\rho g(\frac{h}{2} + \Delta h) = p_0 + \rho g\frac{21}{4}h + 3\rho g\Delta h$$

Так как давления в момент прекращения перетекания должны быть одинаковы,

$$p_0 + 3\rho g(\frac{7}{2}h - 2\Delta h) = p_0 + \rho g\frac{21}{4}h + 3\rho g\Delta h$$

Отсюда находим Δh

$$\Delta h = \frac{7}{12}h$$

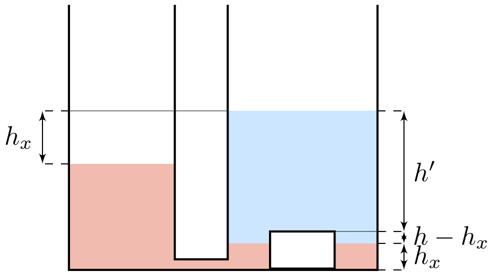
Тогда уровень жидкости в левом колене равен

$$h_{\text{лев}} = \frac{7}{2}h - 2\Delta h = \frac{7}{2}h - \frac{2\cdot 7}{12}h = \frac{7}{3}h$$

Определим высоту содержимого правого колене

$$h_{\text{прав}} = \frac{15}{4}h + \frac{h}{2} + \Delta h = \frac{15}{4}h + \frac{h}{2} + \frac{7}{12}h = \frac{29}{6}h$$

Способ 2. Ещё один способ получения h_x: определим выталкивающую силу, как разность сил давления на нижнюю и верхнюю поверхности бруска.



Давление на верхнюю грань бруска равно

$$p_{\text{верх}} = p_0 + \rho g h'$$

Давление на границе раздела двух жидкостей равно

$$p_0 + \rho g(h' + (h - h_x))$$

Давление на нижнюю грань бруска равно

$$p_{\text{ниж}} = p_0 + \rho g(h' + (h - h_x)) + 3\rho g h_x$$

Разность давлений на нижнюю и верхнюю грани обеспечивает выталкивающую силу, поэтому

$$mg = (p_{\text{ниж}} - p_{\text{верх}})S$$

$$2\rho g h S = (\rho g h + 2\rho g h_x)$$

Из последнего уравнения определяем, что

$$h_x = \frac{h}{2}$$

Способом, описанным в варианте 1, определим высоты столбов жидкостей в левом и правом сосудах в момент начала всплытия бруска и убедимся, что давление жидкости с плотностью 3ρ вблизи дна левого сосуда по-прежнему больше давления вблизи дна в правом сосуде.

Высоту столба жидкости в левом колене $h_{\text{лев}}$ к моменту окончания перетекания определим иначе, не прибегая к поиску Δh. Определим давление на дно в момент прекращения перетекания двумя способами (как давление жидкости 3ρ слева, и через силу давления на дно, которая численно равна весу содержимого сосудов):

$$3\rho g h_{\text{лев}} = \frac{3\rho \cdot 4hSg + 2\rho hSg + \rho(4h \cdot 2S - hS)g}{3S} = 7\rho g h$$

Отсюда

$$h_{\text{лев}} = \frac{7}{3}h$$

Определим высоту содержимого правого колене

$$h_{\text{прав}} = \frac{15}{4}h + \frac{h}{2} + \Delta h = \frac{15}{4}h + \frac{h}{2} + \frac{7}{12}h = \frac{29}{6}h$$

Задача №8-Т4. Тепловые шарики

Определим массу шарика $m_{\text{ш}}$ и его объём $V_{\text{ш}}$: $m_{\text{ш}} = \frac{C_{\text{ш}}}{c} = 0{,}4$ кг; $V_{\text{ш}} = \frac{m_{\text{ш}}}{\rho_{\text{ш}}} \approx$ 51 мл.

Будем считать, что при опускании первого шарика вода не выливается из сосуда. Проверим это предположение. Для этого запишем уравнение теплового баланса для опускания первого шарика, считая, что вся вода остаётся в сосуде

$$c_{\text{в}} m_0 (t_1 - t_0) + C_{\text{ш}}(t_1 - t_{\text{ш}}) = 0$$

Выразим отсюда температуру

$$t_1 = \frac{c_{\text{в}} m_0 t_0 + C_{\text{ш}} t_{\text{ш}}}{c_{\text{в}} m_0 + C_{\text{ш}}} = 35\,^{\circ}\text{C}.$$

Полученный результат означает, что вода при опускании первого шарика из сосуда не выливается.

Проверим, не выливается ли вода при опускании второго шарика. Запишем уравнение теплового баланса в этом предположении, обозначив предполагаемую температуру после установления теплового равновесия $t_2^{'}$

$$c_{\text{в}} m_0 (t_2^{'} - t_1) + C_{\text{ш}}(t_2^{'} - t_1) + C_{\text{ш}}(t_2^{'} - t_{\text{ш}}) = 0$$

Выразим отсюда предполагаемое значение температуры

$$t_2^{'} = \frac{c_{\text{в}} m_0 t_1 + C_{\text{ш}} t_1 + C_{\text{ш}} t_{\text{ш}}}{c_{\text{в}} m_0 + 2C_{\text{ш}}} = 45{,}2\,^{\circ}\text{C}$$

В условии задачи сказано, что после опускания второго шарика температура устанавливается $t_2 = 47\,^{\circ}\text{C}$, следовательно, часть воды в этом случае выльется. Определим массу вылившейся воды Δm, для этого снова запишем уравнение теплового баланса

$$c_{\text{в}}(m_0 - \Delta m)(t_2 - t_1) + C_{\text{ш}}(t_2 - t_1) + C_{\text{ш}}(t_2 - t_{\text{ш}}) = 0$$

$$m_0 - \Delta m = \frac{C_{\text{ш}}(t_{\text{ш}} - t_2) - C_{\text{ш}}(t_2 - t_1)}{c_{\text{в}}(t_2 - t_1)} = 155 \text{ г}$$

Таким образом, при опускании второго шарика вылилось $\Delta m = 45$ г воды.

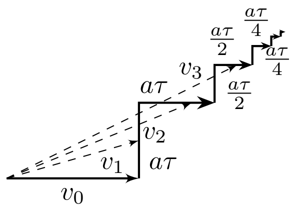
При опускании третьего шарика выльется объём воды равный объёму шарика, что соответствует массе 51 г, поэтому нагреваться будет масса воды, равная $m' = 155$ г -51 г $= 104$ г. Запишем уравнение теплового баланса и выразим конечную температуру t_3

$$c_в m'(t_3 - t_2) + 2C_ш(t_3 - t_2) + C_ш(t_3 - t_ш) = 0$$

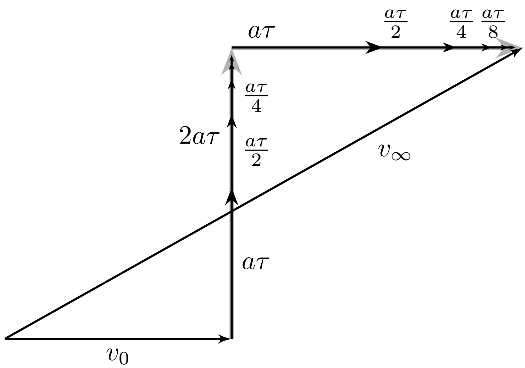
$$t_3 = \frac{c_в t_2 m' + 2C_ш t_2 + C_ш t_1}{m' c_в + 3C_ш} = 57\,^\circ\mathrm{C}$$

Задача №9-T1. Импульсное ускорение

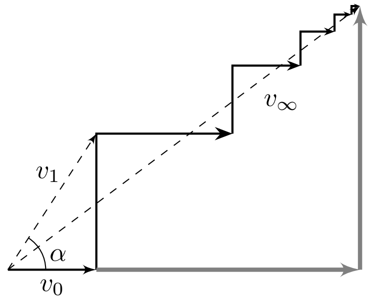
Изобразим с помощью векторной диаграммы как изменялась скорость частицы.



Можно заметить, что скорость частицы монотонно возрастала со временем, значит минимальная по модулю скорость была в начале, а максимальная в конце движения (при очень большом времени). Перегруппируем векторы приращения скоростей



Воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии, получим, что изменение проекции скорости на ось x за длительное время (бесконечное количество циклов) будет $2a\tau$. Аналогично изменится и y компонента скорости. Значит, максимальная скорость в процессе движения: $v_\infty = \sqrt{(v_0 + 2a\tau)^2 + (2a\tau)^2}$. Выразим начальную скорость через $a\tau$. Угол отклонения вектора скорости через время τ после начала движения: $\operatorname{tg}\alpha_1 = (a\tau)/v_0$. Через большое время после начала движения — $\operatorname{tg}\alpha_\infty = (2a\tau)/(v_0 + 2a\tau)$. Тогда возможны два варианта:



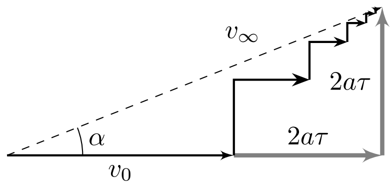
1) если начальная скорость мала, тогда максимальное отклонение вектора скорости будет через τ после начала движения:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \geqslant \operatorname{tg}\alpha_\infty \Rightarrow \alpha_1 = \alpha.$$

Рассматриваемый случай реализуется при $v_0 \leqslant 2a\tau$. Тогда:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\tau}{v_0} \Rightarrow v_{\min} = v_0 = a\tau \cdot \operatorname{ctg}\alpha;$$

$$v_{\max} = v_\infty = \sqrt{(a\tau \cdot \operatorname{ctg}\alpha + 2a\tau)^2 + (2a\tau)^2} = a\tau\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 4\operatorname{ctg}\alpha + 8}.$$



2) Если $v_0 \geqslant 2a\tau$, то максимальное отклонение вектора скорости будет в предельной ситуации ($\alpha_\infty = \alpha$).

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a\tau}{v_0 + 2a\tau} \Rightarrow v_{\min} = v_0 = 2a\tau \cdot (\operatorname{ctg}\alpha - 1);$$

$$v_{\max} = v_\infty = \frac{2a\tau}{\sin\alpha}.$$

Задача №9-Т2. Другой уровень

Так как оба конца трубки открыты в атмосферу, атмосферное давление можно не учитывать. Условие равновесия поршня в начальном положении:

$$\rho_1 g h_1 S = \rho_2 g h_2 S;$$

где h_1 и h_2 — высота столба жидкости выше центра поршня в левой и правой частях соответственно. При добавлении жидкости плотностью ρ_1 в левый сосуд поршень сместится на расстояние x вправо, и на него начнёт действовать сила упругости. Условие равновесия поршня после добавления некоторого количества жидкости:

$$\rho_1 g H_1 S = \rho_2 g H_2 S + kx.$$

После перемещении поршня на расстояние x, уровень жидкости в правой части тоже увеличится на x:

$$\rho_1 g(h_1 + y)S = \rho_2 g(h_2 + x)S + kx.$$

Где y — высота, на которую увеличился уровень жидкости в левом сосуде. Для того чтобы разность высот Δh оставалась постоянной, y должно равняться x. Тогда:

$$k = (\rho_1 - \rho_2)gS.$$

Условие равновесия поршня после добавления в левую часть объёма ΔV жидкости плотностью ρ_2:

$$\rho_1 g(h_1 - x)S + \rho_2 gzS = \rho_2 g(h_2 + x)S + kx.$$

Чтобы верхние границы жидкостей совпадали, высота z добавленной в левое колено жидкости плотностью ρ_2 должна быть равна: $z = \Delta h + 2x$. Тогда, с учётом найденного коэффициента жёсткости пружины $k = (\rho_1 - \rho_2)gS$:

$$x = \frac{\rho_2 \Delta h}{2(\rho_1 - \rho_2)}.$$

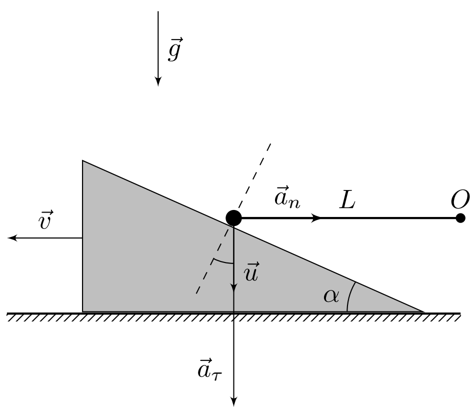
Убедимся, что при перемещении поршня на расстояние x в левой вертикальной части трубки останется жидкость плотностью ρ_1. Условие равновесия поршня в начальный момент:

$$\rho_1 g h_1 S = \rho_2 g(h_1 + \Delta h)S \Rightarrow h_1 = \frac{\rho_2 \Delta h}{\rho_1 - \rho_2} \Rightarrow h_1 > x.$$

Объём добавленной жидкости может быть найден по формуле: $\Delta V = S(\Delta h + 2x)$. Подставив в это выражение значение x, найдём ΔV:

$$\Delta V = \frac{\rho_1 \Delta h S}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Задача №9-Т3. Не падать



Чтобы шарик скользил по наклонной поверхности без отрыва, необходимо, чтобы проекции скорости v клина и скорости u шарика на ось нормальную к поверхности были равны. Запишем кинематическую связь для момента, когда стержень горизонтален:

$$u \cos\alpha = v \sin\alpha \Rightarrow u = v \operatorname{tg}\alpha.$$

Поскольку ось, перпендикулярная наклонной поверхности клина, постоянна по направлению, а проекции скоростей клина и шарика на эту ось одинаковы, то и проекции ускорений клина и шарика на данную ось также равны. После отрыва шарика от клина все действующие на клин силы вертикальны. В результате этого клин начинает двигаться равномерно. Следовательно, в момент отрыва проекция ускорения шарика на нормаль к поверхности клина равна нулю.

Равенство нулю проекции ускорения шарика в момент отрыва можно доказать другим способом: перейдём в поступательно движущуюся систему отсчёта, связанную с клином. В этой системе отсчёта относительное ускорение шарика будет направлено вдоль наклонной поверхности клина. Поскольку в момент отрыва шарика от клина все действующие на клин силы вертикальны, его ускорение равно нулю. Это означает, что в лабораторной системе отсчёта ускорение шарика тоже будет направлено вдоль поверхности клина.

Так как стержень нерастяжимый, движение шарика представляет собой движение по окружности радиусом L. Найдём тангенциальную a_τ и нормальную a_n компоненты ускорения шарика. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось. Так как по условию в рассматриваемый момент шарик отрывается от поверхности клина, на него действует единственная вертикальная сила — сила тяжести. Исходя из этого, получаем: $ma_\tau = mg \Rightarrow a_\tau = g$. Для нахождения нормальной компоненты ускорения воспользуемся формулой центростремительного ускорения:

$$a_n = \frac{u^2}{L}.$$

Далее рассмотрим три возможных способа определения скорости шарика u в момент отрыва.

Первый способ

Запишем уравнение кинематической связи для проекций ускорений на нормаль к наклонной поверхности клина:

$$0 = a_\tau \cos\alpha - a_n \sin\alpha \Rightarrow a_\tau = a_n \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow g = \frac{u^2}{L}\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow u^2 = gL\operatorname{ctg}\alpha.$$

Второй способ

Второй закон Ньютона для шарика в момент отрыва:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}.$$

Как было доказано ранее, в момент отрыва ускорение шарика в лабораторной системе отсчёта направлено вдоль поверхности клина. Спроецируем второй закон Ньютона на ось перпендикулярную наклонной поверхности клина и получим:

$$T\sin\alpha = mg\cos\alpha.$$

В этот момент шарик движется по окружности с центром в точке O и радиусом L, значит $T = ma_n$. Следовательно:

$$\frac{u^2}{L}\sin\alpha = g\cos\alpha \Rightarrow g = \frac{u^2}{L}\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow u^2 = gL\operatorname{ctg}\alpha.$$

Третий способ

Запишем уравнение кинематической связи для скоростей шарика и клина при скольжении без отрыва в произвольный момент времени:

$$u\cos\varphi = v\sin\alpha,$$

где φ — угол между стержнем и наклонной плоскостью клина. Возьмём производную по времени от кинематической связи:

$$a_\tau\cos\varphi - u\sin\varphi\cdot\omega = a_\text{к}\sin\alpha.$$

В рассматриваемый момент $a_\text{к} = 0$, так как все силы действующие на клин вертикальны, и $\varphi = \alpha$. Тогда:

$$a_\tau = u\omega\operatorname{tg}\alpha = a_n\operatorname{tg}\alpha = \frac{u^2\operatorname{tg}\alpha}{L} \Rightarrow g = \frac{u^2\operatorname{tg}\alpha}{L} \Rightarrow u^2 = gL\operatorname{ctg}\alpha.$$

С учётом того, что $u = v\operatorname{tg}\alpha$, окончательно получим:

$$v = \sqrt{\frac{gL}{\operatorname{tg}^3\alpha}} = \sqrt{gL\operatorname{ctg}^3\alpha}.$$

Задача №9-Т4. Тепловой цикл

За время $\Delta\tau$ сжигается $\Delta m_0 = \mu_0\Delta\tau$ газа, то есть выделяется $\Delta Q_\text{вся} = \Delta m_0 q$ энергии. Лишь η-ая её часть идет на нагревание воды $\Delta Q_\text{эфф} = \eta\Delta Q_\text{вся}$. Тогда эффективная мощность

$$P = \frac{\Delta Q_\text{эфф}}{\Delta\tau} = \eta\mu_0 q \approx 2{,}3\ \text{кВт}.$$

Заметим, что на участке 1−2 не происходит изменения массы воды (не происходит испарений и доливаний), т.е. этот участок вертикальный. Обозначим массу воды в точке 1 за M. Уравнение, описывающее испарение на участке $2-3$:

$$P\tau_{23} = (M - \frac{M}{4})L = \frac{3M}{4}L.$$

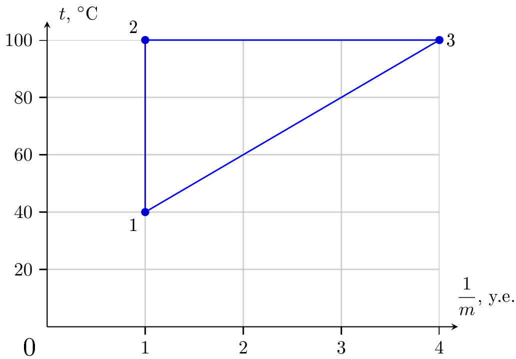
Уравнение, описывающее доливание воды на участке $3-1$:

$$\mu\tau_{31} = M - \frac{M}{4} = \frac{3M}{4}.$$

С учетом $\tau_{23} = \tau_{31}$, получим

$$\mu = \frac{P}{L} = \mu_0\frac{\eta q}{L} = 1{,}0\ \text{г/с}.$$

Уравнение теплового баланса на участке $3-1$ ($t_{100}=100\,^\circ\text{C}$ — температура кипения воды, c — удельная теплоемкость воды, m и t — текущие масса и температура воды на участке $3-1$):



$$c\frac{M}{4}(t_{100}-t)=c(m-\frac{M}{4})(t-t_\text{x}).$$

Из него следует зависимость температуры воды от её массы на этом участке

$$t(m)=t_\text{x}+\frac{M}{4}(t_{100}-t_\text{x})\cdot\frac{1}{m}.$$

Последняя формула показывает линейность участка $3-1$. Температура воды при массе, равной начальной M, равна $t_1=t(M)=t_x+(t_{100}-t_x)/4=(t_{100}+3t_x)/4=40\,^\circ\text{C}$. Восстановим целостный вид диаграммы — это прямоугольный треугольник с вершинами $(1;40)$, $(1;100)$, $(4;100)$.

$$t_1=40\,^\circ\text{C}.$$

Уравнение, описывающее нагревание на участке $1-2$:

$$P\tau_{12}=cM(t_{100}-t_1)$$

Тогда

$$\frac{\tau_{23}}{\tau_{12}}=\frac{3L}{4c(t_{100}-t_1)}\approx 6{,}9.$$

Задача №9-Т5. Whatметр

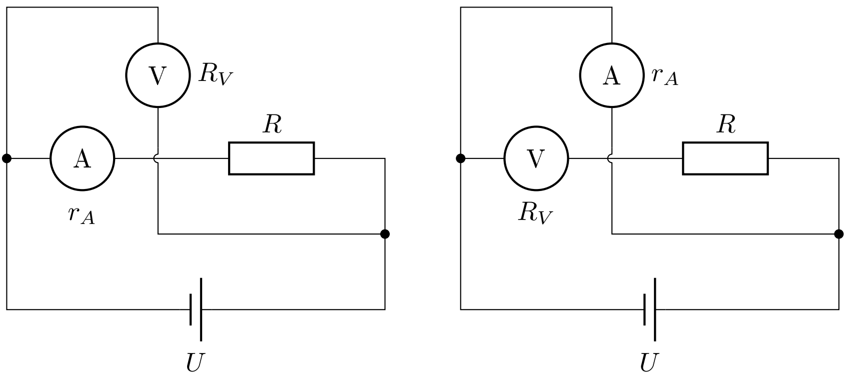
Необходимо проанализировать два возможных варианта подключения и рассчитать показания ваттметра для каждого из них. Обозначим напряжение на выводах идеального источника постоянного напряжения за U.

В случае левой схемы показания амперметра (I_1) и вольтметра (U_1):

$$\begin{cases} I_1=\dfrac{U}{R+r_A};\\ U_1=U.\end{cases}$$

По условию показания ваттметра равны произведению показаний амперметра и вольтметра:

$$P_1'=I_1U_1=\frac{U^2}{R+r_A}.$$



В случае правой схемы показания амперметра (I_2) и вольтметра (U_2):

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{U}{r_A}; \\ I_V = \dfrac{U}{R+R_V}; \\ U_2 = I_V R_V = \dfrac{UR_V}{R+R_V}. \end{cases}$$

Тогда показания ваттметра в рассмотренном случае:

$$P_2' = I_2 U_2 = \frac{U^2}{R+R_V} \cdot \frac{R_V}{r_A}.$$

Отношение показаний ваттметра позволяет исключить напряжение источника.

$$k = \frac{P_1'}{P_2'} = \frac{R+R_V}{R+r_A} \cdot \frac{r_A}{R_V}.$$

Отметим, что индексы 1 и 2 для мощностей в формуле выше не обязаны соответствовать индексам в условии задачи, поскольку нам неизвестно, какая схема была собрана первой. Выразим искомое внутреннее сопротивление вольтметра:

$$R_V = \frac{R}{k\dfrac{R+r_A}{r_A} - 1}.$$

Подставляем числовые значения, учитывая два возможных варианта соответствия между индексами в условии и нашем решении:

1. $k = 100/1 = 100 \Rightarrow R_V \approx 5{,}0 \cdot 10^{-2}$ Ом. Величина получилась меньше сопротивления амперметра, значит этот ответ неверный.

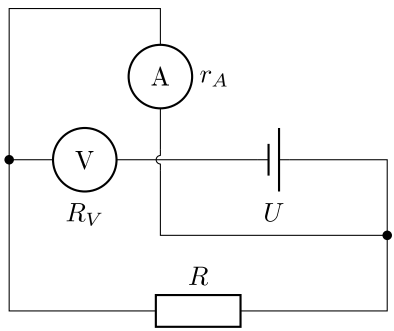
2. $k = 1/100 = 0{,}01 \Rightarrow R_V = 50$ кОм.

Таким образом искомое внутреннее сопротивление вольтметра:

$$R_V = 50 \text{ кОм}.$$

Рассмотрим схему, изображённую на рисунке. Сила полного тока в цепи:

$$I = \frac{U}{R_V + \frac{Rr_A}{R+r_A}}.$$



С учётом неравенства $R_V \gg R \gg r_A$ получим:

$$I = \frac{U}{R_V + \frac{Rr_A}{R+r_A}} \approx \frac{U}{R_V}.$$

Силу тока, протекающего через амперметр, с учётом неравенства, можно выразить следующим образом:

$$I_A = I \cdot \frac{R}{R+r_A} \approx I = \frac{U}{R_V}.$$

Показания вольтметра равны $U_V = IR_V$, а показания ваттметра:

$$P_3 = I_A U_V = I^2 R_V = \frac{U^2}{R_V};\ U^2 = P_2(R+r_A) \Rightarrow P_3 = \frac{P_2(R+r_A)}{R_V} \approx 10 \text{ мВт}.$$

Задача №10-Т1. Исследовательский зонд

Угловое расстояние между Болтиком и центром Шелезяки будет максимальным, когда прямая «зонд-Болтик» станет касательной к орбите спутника. В этом случае $\sin\theta_{max} = \frac{r}{R}$, откуда

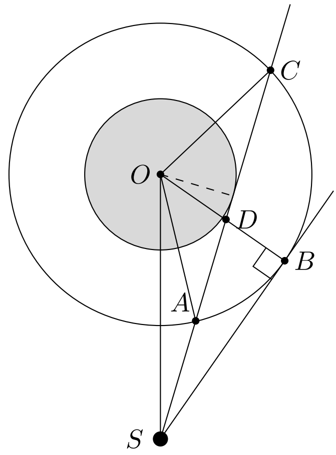
$$\frac{R}{r} = \frac{1}{\sin\theta_{max}} \approx 3{,}864.$$

Пусть M — масса Шелезяки. Угловые скорости движения спутника и зонда, соответственно, равны

$$\omega_с = \sqrt{\frac{GM}{r^3}},\quad \omega_з = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_с = \omega_з\left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} \approx 7{,}595\omega_з.$$

Следовательно, с точки зрения зонда спутник делает один оборот вокруг планеты за время

$$T_{отн} = \frac{360^\circ}{\omega_с - \omega_з} = \frac{360^\circ}{6{,}595\omega_з} = \frac{T}{6{,}595}.$$



Чтобы найти $T_{\text{отн}}$, сделаем чертёж (см. рис.), где точка O — центр планеты, точка S — исследовательский зонд, а нарисованная окружность — орбита Болтика. В точках A или C спутник находится на краю видимого диска планеты, а точка B соответствует максимальному угловому расстоянию между центром Шелезяки и Болтиком (при наблюдении с зонда). Из геометрии рисунка $\angle ASB = \theta_{max} - \theta_0 = 12°$, $\angle ODA = 90° + \angle ASB = 102°$. По теореме синусов для треугольника $\triangle SOA$

$$\frac{R}{\sin(\angle OAS)} = \frac{r}{\sin\theta_0},$$

откуда, учитывая, что $\angle OAS > 90°$, получим, что

$$\sin(\angle OAS) = \frac{R}{r}\cdot\sin\theta_0 = 3{,}864\cdot\sin 3° \approx 0{,}202 \qquad \Rightarrow \qquad \angle OAS \approx 168{,}334°.$$

Найдём угол $\angle AOB$:

$$\angle AOB = \angle OAS - \angle ODA = 66{,}334°.$$

Так как движение по окружности равномерное, $\angle AOB = 360° t_1/T_{\text{отн}}$, откуда

$$T_{\text{отн}} = \frac{360°}{66{,}334°}\cdot t_1 \approx 5{,}43\cdot 165 \text{ мин} \approx 895 \text{ мин}.$$

С учётом того, что $T = 6{,}595 T_{\text{отн}}$, получим

$$T \approx 5900 \text{ мин}.$$

Пусть $R_{\text{Ш}}$ — радиус Шелезяки, тогда

$$\sin\theta_0 = \frac{R_{\text{Ш}}}{R} \quad\Rightarrow\quad R_{\text{Ш}} = R\sin 3° \approx 0{,}0523R.$$

Записывая массу планеты как $M = 4\pi R_{\text{Ш}}^3\rho/3$ и подставляя её в выражение для угловой скорости движения зонда по орбите, получим

$$\omega_{\text{з}}^2 = \frac{G\cdot 4\pi R_{\text{Ш}}^3\rho/3}{R^3} \quad\Rightarrow\quad \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi G}{3}\cdot\rho\cdot 0{,}0523^3,$$

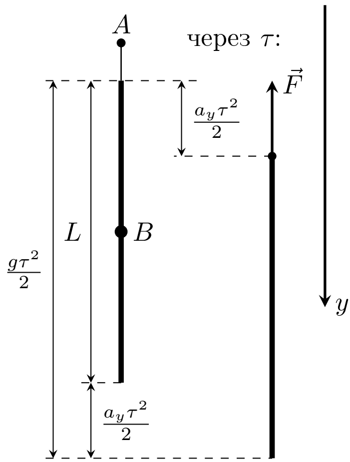
откуда

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2\cdot 0{,}0523^3} \approx 7900 \text{ кг/м}^3.$$

Задача №10-Т2. С ускорением

После пережигания нити длина вертикального участка цепочки, на край которой действует сила F, будет увеличиваться. Другой участок цепочки сокращающейся длины будет двигаться только под действием силы тяжести, значит модуль ускорения верхнего края цепочки сразу после пережигания и до момента полного разворота цепочки равен

$$a_0 = g.$$



Способ 1. Согласно теореме о движении центра масс ускорение центра масс цепочки в проекции на ось y (см. рисунок) равно $a_y = \frac{mg-F}{m} = g - \frac{F}{m}$. За время τ центр масс цепочки сместится вдоль оси y на $\frac{a_y\tau^2}{2}$. Верхний край цепочки за время τ переместится на расстояние $\frac{g\tau^2}{2}$, значит $L + \frac{a_y\tau^2}{2} = \frac{g\tau^2}{2}$. С учётом полученных соотношений

$$\tau = \sqrt{\frac{2Lm}{F}}.$$

Способ 2. Ответ на вопрос можно получить и другим способом. Пересядем из лабораторной системы отсчёта (далее — ЛСО) в неинерциальную систему отсчёта (далее — НеИСО), падающую вниз без начальной скорости с ускорением свободного падения g. В этой системе отсчёта изначально неподвижная цепочка приходит в движение под действием лишь одной силы F. И сумма действующих на любой элементарный (малый) участок силы тяжести и силы инерции равна нулю. В этом случае центр масс цепочки движется согласно теореме о движении центра масс с ускорением $a' = F/m$ и проходит за искомое время τ расстояние L. А значит $\tau = \sqrt{\frac{2L}{a'}}$, что дает тот же ответ.

Способ 1. Через время τ все части цепочки движутся с одинаковой скоростью, равной скорости её центра масс. А значит $v = |v_y| = |a_y|\tau$, то есть

$$v = |g - \frac{F}{m}|\sqrt{\frac{2Lm}{F}}.$$

Способ 2. Ответ на этот пункт можно получить, также используя пересадку в НеИСО. Скорость в данной системе отсчёта сразу после разворота цепочки равна $v' = a'\tau = \frac{F}{m}\sqrt{\frac{2Lm}{F}} = \sqrt{\frac{2FL}{m}}$ и направлена вверх. В данный момент выбранная система отсчёта будет двигаться вниз со скоростью $v_c = g\tau = g\sqrt{\frac{2Lm}{F}}$.

При пересадке обратно в ЛСО с учётом закона сложения скоростей получаем $v_y = v_c - v' = (g - \frac{F}{m})\sqrt{\frac{2Lm}{F}}$. А значит $v = |v_y|$.

Способ 1. Работа A_F силы F равна сумме изменения механической энергии $\Delta E_{\text{мех}}$ цепочки и выделившегося количества теплоты Q: $A_F = \Delta E_{\text{мех}} + Q$, где $A_F = F(L - \frac{a_y\tau^2}{2})$, $\Delta E_{\text{мех}} = \Delta K + \Delta \Pi = \frac{mv^2}{2} - mg\frac{a_y\tau^2}{2}$. Откуда находим $Q = FL$.

Способ 2. В НеИСО к моменту полного разворота цепочки точка приложения силы F переместится на $2L$, а значит её работа равна $2FL$. Изменение кинетической энергии цепочки равно $\frac{mv'^2}{2} = FL$. С учётом этого находим выделившееся количество теплоты $Q = 2FL - FL = FL$ (как разность работы силы F и изменения кинетической энергии).

Способ 1. После распрямления цепочки выделим нижнюю половину нити (ниже точки B) массой $m/2$ и запишем для этого участка теорему о движении центра масс в проекции на ось Oy: $\frac{m}{2}a_y = \frac{m}{2}g - T$. В итоге получаем

$$T = \frac{F}{2}.$$

Рассматривая движение в НеИСО, на нижнюю половину цепочки после её разворота будет действовать сила $T = \frac{m}{2}a' = \frac{F}{2}$.

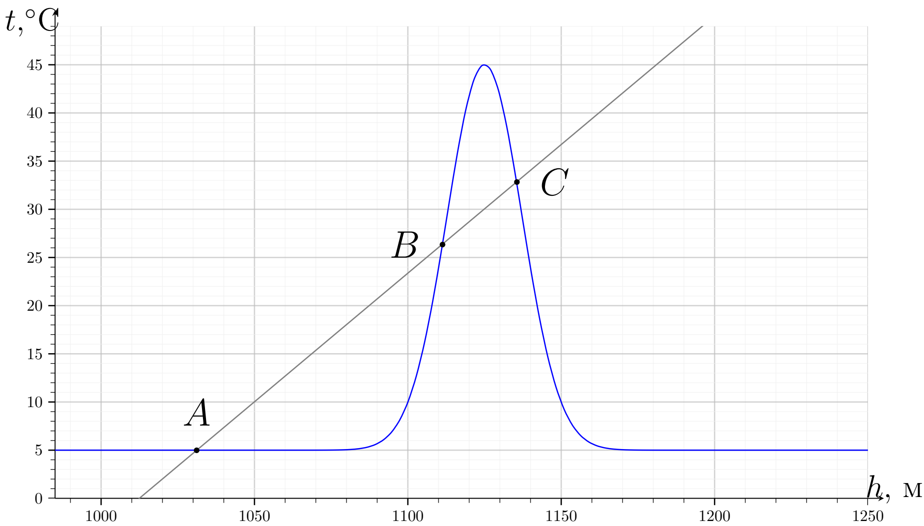
Задача №10-Т3. Пузырёк чёрного курильщика

Пузырёк будет находится в равновесии, если плотность газа ρ внутри него будет равна плотности воды $\rho_{\text{в}}$.

Плотность газа согласно уравнению Менделеева-Клапейрона определяется выражением: $\rho = \frac{\mu p}{RT}$, где T — температура газа в кельвинах, p — давление газа на глубине h, равное $p = p_0 + \rho_{\text{в}}gh$. Откуда получаем, что плотность газа равна

$$\rho = \frac{\mu(p_0 + \rho_{\text{в}}gh)}{RT}.$$

Температура воды изменяется с глубиной, при этом данная зависимость не задана аналитически, а представлена в виде графика. Поэтому представим условие равновесия графически. Для этого из последнего уравнения получим зависимость температуры T газа внутри пузырька от глубины h, на которой данный пузырёк находится. Учитывая, что $\rho = \rho_{\text{в}}$, из последнего уравнения находим: $T = \frac{\mu p_0}{R\rho_{\text{в}}} + \frac{\mu g}{R} \cdot h$. Подставим числа в уравнение: $T = 2{,}62\ \text{К} + 0{,}267\frac{\text{К}}{\text{м}} \cdot h$. Учитывая связь температуры t по шкале Цельсия с температурой T по шкале Кельвина, получаем: $t = -270{,}53\ {}^\circ\text{C} + 0{,}267\frac{{}^\circ\text{C}}{\text{м}} \cdot h$. Полученную из условия равновесия зависимость $t(h)$ и зависимость из условия задачи представим на одном графике. Видно, что графики зависимостей пересекаются в трёх точках A, B и C, значит существует три соответствующих положения равновесия.



Из графика находим глубину для трёх положений равновесия пузырька, соответствующие точкам A, B и C графика: $h_A = (103010)$ м; $h_B = (111010)$ м; $h_C = (113510)$ м.

Проанализируем положение равновесия в точке A на устойчивость. Пусть пузырёк смещается на чуть бОльшую глубину. В этом случае температура газа внутри пузырька будет меньше той, которая необходима для обеспечения его равновесия, а значит плотность газа в пузырьке будет больше плотности воды. Это означает, что сила Архимеда будет меньше силы тяжести, и, следовательно, пузырёк будет тонуть и дальше. То есть получаем, что положение равновесия в точке A неустойчиво. Аналогично рассуждая, получим, что положение равновесия в точке B устойчиво, а в точке C — неустойчиво.

Задача №10-Т4. Точно не Снеллиус?

В условии задачи не указан тип линзы, поэтому необходимо понять, какая линза может быть. Изображение действительного объекта в рассеивающей линзе всегда лежит между фокальной плоскостью и плоскостью линзы. Так как B' лежит в плоскости двойного фокуса, то линза не может быть рассеивающей, поэтому делаем вывод, что линза собирающаяся. Изображение B' может быть действительным или мнимым.

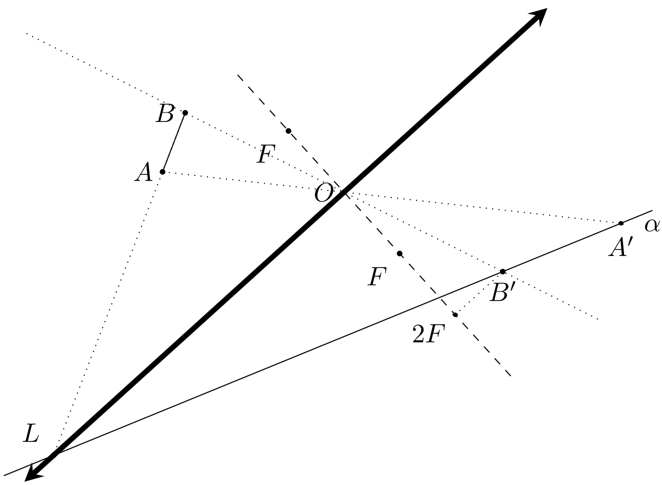
Рассмотрим сначала случай, когда изображение B' действительное. Если изображение действительное, то точки B и B' лежат в плоскостях двойного фокуса и оптический центр лежит на середине отрезка BB'.

Рассмотрим теперь случай, когда изображение B' мнимое. В этом случае B лежит между фокальной плоскостью и плоскостью линзы. Запишем формулу тонкой линзы для этого случая:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{-2F} = \frac{1}{F},$$

откуда находим, что $a = 2F/3$, а расстояние между предметом и его изображением $\Delta = 2F - a = 4F/3$ в два раза больше расстояния между предметом и линзой a.

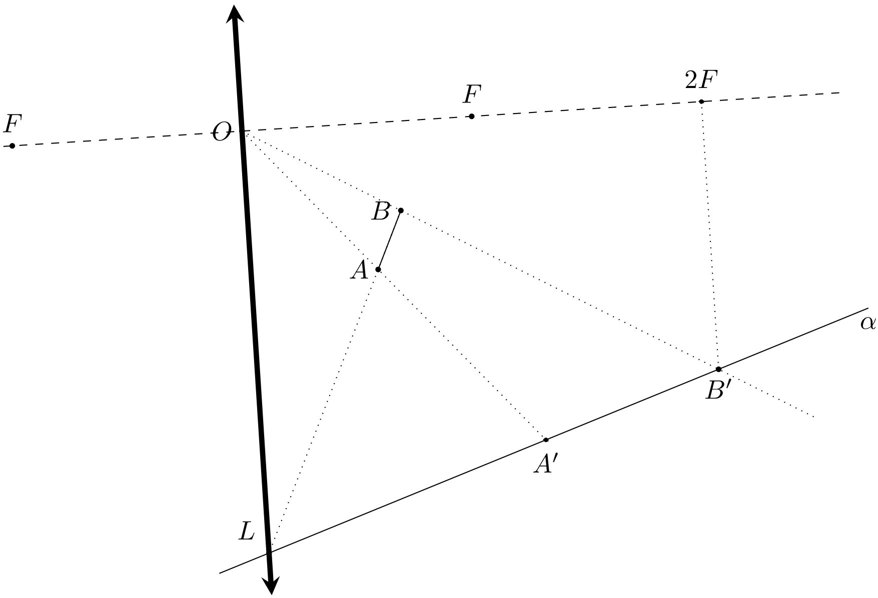
Для построения оптического центра линзы в первом случае делим отрезок BB' пополам, на середине этого отрезка и будет оптический центр O. Во втором случае делим отрезок BB' пополам, продолжаем прямую проходящую через это отрезок за точку B и откладываем еще половину отрезка BB' — найденная точка будет оптическим центром O.



Для восстановления положения линзы найдем вторую точку линзы, для этого заметим, что луч AB после преломления в линзе пойдёт вдоль прямой α, так как изображение точки A' также лежит на этой прямой. Продолжим прямую, проходящую через отрезок AB, до пересечения с прямой α, найденная точка пересечения L будет принадлежать плоскости линзы. Рисуем линзу в виде отрезка, содержащего точки L и O. Для восстановления главной оптической оси (далее — ГОО) построим перпендикуляр к линзе в точке O.

Чтобы найти фокус, можно пойти двумя путями.

а) Пустим из т. B луч, идущий параллельно ГОО, который после преломления в линзе пройдет через т B' и пересечёт ГОО в точке фокуса;



б) Вспомним, что т. B' лежит в двойной фокальной плоскости. Проведём эту плоскость, определим по её пересечению с ГОО точку двойного фокуса, разделим получившийся отрезок пополам и получим точку фокуса F. На рисунке представлены построения, соответствующие второму способу решения.

Чтобы построить точку A' можно пойти двумя путями:

а) Пустим из т. A луч, параллельный ГОО. После преломления в линзе этот луч пройдет через фокус и пересечется с прямой α в т. A'.

б) Пустим из т. A луч, проходящий через оптический центр O. Луч (в первом случае) или его продолжение (во втором случае) пересечется с прямой α как раз в т. A'.

Задача №10-Т5. Усилитель

Если I — сила тока, текущего между стоком и истоком в цепи усилителя, то

$$\mathcal{E} = IR + U \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{\mathcal{E} - U}{R}.$$

Данная зависимость называется нагрузочной характеристикой, а её график, в данном случае, — нагрузочной прямой. Учитывая, что эта

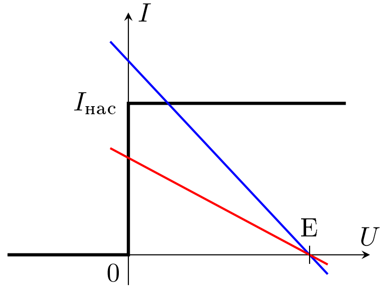


Рис. 1

прямая проходит через точки с координатами $(0; \mathcal{E}/R)$ и $(\mathcal{E}; 0)$, построим её поверх вольт-амперной характеристики, приведённой в условии, и определим точку их пересечения. В результате получим, что

1. при $I_{\text{нас}} < \mathcal{E}/R$ (синяя линия на рис. 1), сила тока, текущего от стока к истоку, равна $I = I_{\text{нас}}$, а $U = \mathcal{E} - I_{\text{нас}}R > 0$;
2. при $I_{\text{нас}} \geq \mathcal{E}/R$ (красная линия на рис. 1), напряжение между стоком и истоком $U = 0$, а сила тока $I = \mathcal{E}/R$.

Таким образом, напряжение на выходе усилителя не может быть отрицательным, то есть $U \geq 0$.

Согласно графику зависимости $I_{\text{нас}}(U_{\text{зи}})$, приведённому в условии, на участке $U_{\text{зи}} > -U_0$ эта зависимость линейна:

$$I_{\text{нас}} = \frac{I_0}{U_0}\left(U_{\text{зи}} + U_0\right),$$

следовательно, линейной будет и зависимость $U(U_{\text{зи}})$:

$$U = \mathcal{E} - I_{\text{нас}}R = \mathcal{E} - I_0R - \frac{I_0R}{U_0} \cdot U_{\text{зи}}. \qquad (*)$$

В этом случае выходной сигнал будет отличаться от входного лишь сдвигом и масштабированием, то есть синусоида, например, останется синусоидой:

$$U_{\text{зи}} = U_a \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \qquad \Rightarrow \qquad U(t) = \mathcal{E} - I_0R - \frac{I_0R}{U_0} \cdot U_a \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right).$$

Данное правило нарушается в двух случаях:

1. $U_{\text{зи}} \leq -U_0$. Тогда

$$I_{\text{нас}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I = 0 \quad \text{при любом } U \qquad \Rightarrow \qquad U = \mathcal{E}.$$

2. $U = 0$. В этом случае

$$I_{\text{нас}} = \frac{I_0}{U_0}\left(U_{\text{зи}} + U_0\right) \geq \frac{\mathcal{E}}{R} \qquad \Rightarrow \qquad U_{\text{зи}} \geq U_0 \cdot \frac{\mathcal{E} - I_0R}{I_0R}.$$

Подытожим: синусоидальный сигнал на входе преобразуется усилителем в синусоидальный сигнал на выходе, если для всех $U_{\text{зи}}$, удовлетворяющих условию $|U_{\text{зи}}| \leq U_a$, выполняется неравенство

$$-U_0 \leq U_{\text{зи}} \leq U_0 \cdot \frac{\mathcal{E} - I_0R}{I_0R}.$$

а) Пусть $R = 5$ Ом. Тогда, подставляя остальные данные, получим

$$-1\ \text{В} \leq U_{\text{зи}} \leq 3\ \text{В}.$$

Отсюда делаем вывод, что зависимость $U(t)$ будет сохранять форму синусоиды, если $U_a \leq 1$ В.

б) Пусть теперь $R = 16$ Ом. В этом случае неравенство для $U_{\text{зи}}$ примет вид

$$-1\text{ В} \leq U_{\text{зи}} \leq 0{,}25\text{ В},$$

следовательно, синусоидальность сигнала сохраняется при $U_a \leq 0{,}25$ В.

Если синусоидальность выходного сигнала не нарушается, воспользуемся формулой $(*)$, где величина $\mathcal{E} - I_0R$ задаёт смещение средней линии синусоиды, а I_0R/U_0 является масштабным множителем, имеющим смысл искомого коэффициента усиления K. Вычислим его при $R = 5$ Ом:

$$K = \frac{I_0R}{U_0} = 2{,}5.$$

При $R = 8$ Ом зависимость, заданная формулой $(*)$, будет иметь вид

$$U = 6\text{ В} - 4U_{\text{зи}} = 6\text{ В} - 8\text{ В} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right).$$

График этой функции (красный пунктир на рис. 2) — сдвинутая вдоль вертикальной оси синусоида, минимальное и максимальное значения напряжения для которой равны

$$U_{min} = 6\text{ В} - 4U_{\text{а}} = 6\text{ В} - 4\cdot 2\text{ В} = -2\text{ В}, \qquad U_{max} = 6\text{ В} + 4U_{\text{а}} = 6\text{ В} + 4\cdot 2\text{ В} = 14\text{ В}.$$

Вблизи $t = 0$ она является убывающей, в отличие от функции $U_{\text{зи}}(t)$. В реальности же, полученную кривую необходимо «обрезать» сверху и снизу: сверху — по линии $U = \mathcal{E} = 10$ В, снизу — по линии $U = 0$. Получившаяся кривая (сплошная линия на рис. 2) и есть требуемый график.

Характерные точки и особенности графика:

1. График является «обрезанной», смещённой вверх по оси ординат синусоидой;
2. $U(N\tau) = 6$ В, где $N = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$;
3. Вблизи оси ординат (оси U) наклон кривой отрицательный;
4. Значения больше 10 В и меньше 0 В «обрезаны» горизонтальными линиями $U = 10$ В и $U = 0$ В;
5. Горизонтальные участки симметричны относительно положения пиков исходной синусоиды (то есть точек с абсциссами $\pm\tau/2,\ \pm 3\tau/2, \ldots$);
6. Верхние горизонтальные участки длиннее нижних.

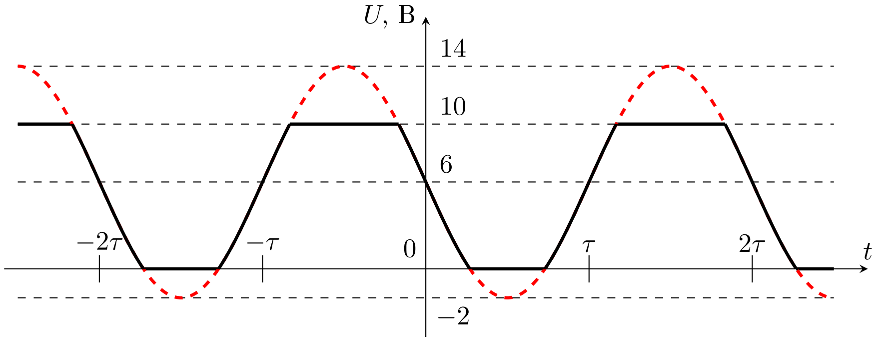
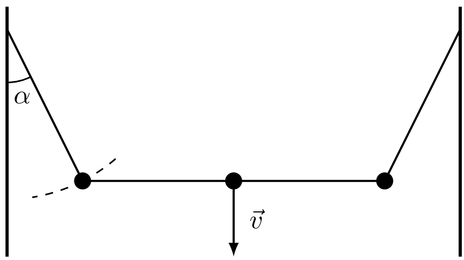


Рис. 2

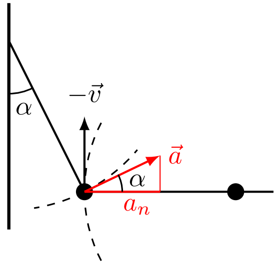
Задача №11-Т1. Зацепился

Скорость падающего шарика в момент, когда он цепляется за горизонтальную нить, $v = \sqrt{2gh}$. Рассмотрим движение одного из шариков, подвешенных на нитях (на рисунке 1 – левого). Он движется по окружности с центром в точке крепления нити на левой стенке. Проекции скоростей левого и центрального шарика на горизонтальную нить должны быть равны. Скорость центрального шарика v направлена вертикально вниз. Следовательно, скорость левого шарика в начальный момент времени равна нулю. Нормальная проекция ускорения левого шарика, поэтому равна нулю, есть только тангенциальная составляющая $\vec{a}_\tau = \vec{a}$. Определим эту величину.



Способ 1. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся вниз с постоянной скоростью $\vec{v}$ (рис.2). В ней левый шарик движется по окружности, центром которой является центральный шарик. Нормальная проекция ускорения в этой системе отсчёта направлена вдоль нити и равна $a_n' = v^2/d$. Но переход в инерциальную систему отсчёта не меняет ни величину, ни направление ускорения. Поэтому a_n является проекцией $\vec{a}$ на горизонтальную нить

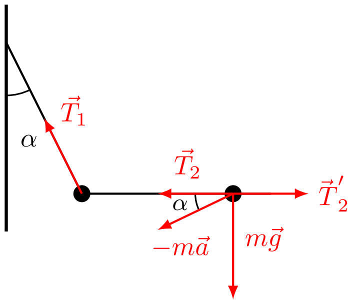
$$a_n' = a \cdot \cos\alpha, \frac{v^2}{d} = a \cdot \cos 30°, a = \frac{2v^2}{\sqrt{3}d}$$



Способ 2. Перейдем в неинерциальную систему отсчёта левого шарика, тогда на центральный шарик будет дополнительно действовать сила инерции $-m\vec{a}$ (см. рис.). Запишем для центрального шарика уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось:

$$m\frac{v^2}{d} = T_2 - ma\cos 30^\circ - T_2'.$$

Откуда получаем тот же ответ.



Теперь уже несложно найти натяжения T_1 боковой и T_2 горизонтальной нитей. Из второго закона Ньютона для левого шарика

$$m\frac{v^2}{d} = T_2 - T_1 \cdot \sin 30^\circ, m\frac{v^2}{\sqrt{3}d} = T_1\cos 30^\circ - mg.$$

Решая систему, получаем

$$T_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg + \frac{2mv^2}{3d}, T_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}mg + \frac{4mv^2}{3d}g.$$

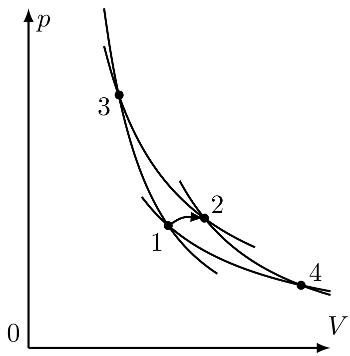
Заменив $v^2 = 2gh$, получаем окончательно

$$T_1 = \frac{mg}{3}\left(2\sqrt{3} + 4\frac{h}{d}\right), T_2 = \frac{mg}{3}\left(\sqrt{3} + 8\frac{h}{d}\right).$$

Задача №11-Т2. Больше или меньше

Способ 1. Через любую точку, соответствующую состоянию газа в координатах pV проходит ровно одна изотерма. Изотермы друг с другом не пересекаются и расположенным выше изотермам соответствуют большие температуры. При переходе газа из состояния 1 в состояние 2 точка, соответствующая его состоянию, не может перемещаться с «верхних» изотерм на «нижние», так как температура газа не уменьшается, а траектория процесса лежит между изотермами, проходящими через точки 1 и 2.

Если теперь рассмотреть аналогичным образом на той же pV — плоскости семейство адиабат, то точка, соответствующая состоянию газа не может перемещаться с «верхних» адиабат на «нижние», так как тепло от газа не отводится, следовательно, траектория процесса лежит между адиабатами, проходящими через точки 1 и 2 (см. рис.).



Покажем, что максимальное количество теплоты в таком процессе подводится к газу в случае, если его сначала адиабатически перевести из состояния 1 в состояние 3, затем изотермически из состояния 3 в состояние 2. Рассмотрим цикл $1-3-2-1$, полагая переход из состояния 2 в состояние 1 произвольным, лежащим внутри криволинейного четырёхугольника $1-3-2-4-1$. Работа в этом цикле равна разности подведённого на участке $1-3-2$ количества теплоты Q_{132} и отведённого при переходе $2-1$ количества теплоты Q_{21}. Так как работа положительна, $Q_{132} > Q_{21}$. Так как процесс 21 выбран произвольно (при ограничениях на подвод тепла и изменение температуры, которые оговорены в условии), то величина Q_{132} соответствует максимальному значению количества теплоты, которое может быть подведено при таком переходе. Аналогично можно показать, что минимально возможному количеству теплоты соответствует процесс, при котором газ сначала изотермически расширяется из состояния 1 в состояние 4, а затем адиабатически сжимается, переходя из состояния 4 в состояние 2.

Способ 2. Приведём анализ характера процессов A и B с использованием понятия энтропии. Процессы A и B протекают так что, в течение всего процесса температура газа не уменьшается и тепло от газа не отводится, значит энтропия в этих процессах не может уменьшаться. Подведенная теплота и изменение энтропии связаны соотношением: $\delta Q = TdS$.

Процесс A протекает с максимально возможным подведенным теплом, значит в этом процессе все подведенное тепло должно быть передано при максимально возможной температуре. Для этого систему нужно перевести без подвода тепла в состояние с максимально возможной температурой, что соответствует процессу, при котором газ сначала адиабатически сжимается из состояния 1 в состояние 3, а затем изотермически расширяется, переходя из состояния 3 в состояние 2. Процесс B протекает с минимально возможным подведенным теплом, значит в этом процессе все подведенное тепло должно быть передано при минимально возможной температуре, после чего в состояние 2 систему нужно перевести без подвода тепла. Это соответствует процессу, при котором газ сначала изотермически расширяется из состояния 1 в состояние 4, а затем адиабатически сжимается, переходя из состояния 4 в состояние 2.

Перейдём к вычислению объёмов, соответствующих точкам 3 и 4. Уравнение, связывающее переменные T и V в адиабатическом процессе:

$$TV^{\gamma-1} = \mathrm{const},$$

где γ — показатель адиабаты. Для одноатомного идеального газа $\gamma = 5/3$ и $TV^{2/3} = \mathrm{const}$. Отсюда для процесса A:

$$TV^{2/3} = 2T(V_A^{\min})^{2/3}, V_A^{\min} = \frac{V}{2\sqrt{2}}.$$

Очевидно, что $V_A^{\max} = 2V$. Для процесса B:

$$2T \cdot (2V)^{2/3} = T \cdot (V_B^{\max})^{2/3}, V_B^{\max} = 4\sqrt{2}V.$$

Разумеется $V_B^{\min} = V$.

Теплота в этих процессах подводится на изотермах. Количество теплоты в изотермическом процессе равно работе газа. Для процесса A:

$$Q_A = 2\nu RT \ln\frac{V_2}{V_3} = 5\nu RT \ln 2.$$

Для процесса B:

$$Q_B = 2\nu RT \ln\frac{V_4}{V_1} = \frac{5}{2}\nu RT \ln 2.$$

Задача №11-Т3. Зарядка аккумулятора

Рассмотрим сначала случай одного генератора. Поскольку груз опускается равномерно, то сила натяжения троса постоянна (она равна весу груза), и поэтому ток в обмотке ротора постоянен. Это значит, что $Q_1 \approx I \cdot t$.

В случае с двумя генераторами они делят нагрузку поровну, то есть сила натяжения каждого троса равна половине силы натяжения для одного троса. Поскольку магнитные силы, действующие на ротор, пропорциональны току через него, то токи через генераторы в этом случае будут равны $I' = I/2$. Суммарный ток зарядки аккумулятора остался тем же, то есть теперь $Q_2 \approx I \cdot t'$.

Значит, отношение времен зарядки

$$\frac{t'}{t} \approx \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{4}{3}.$$

При опускании груза, согласно условию, его потенциальная энергия переходит только в работу по дозарядке аккумулятора и в джоулево тепло, выделяющееся в цепи обмотки ротора. Пусть ε — постоянная (по условию) ЭДС аккумулятора, а R — сопротивление цепи обмотки ротора. Работа над аккумулятором равна $A = \varepsilon Q_1$, а мощность тепловыделения $P = I^2 R$. Если масса груза равна m, то закон сохранения энергии для зарядки одним генератором имеет вид:

$$mgH \approx \varepsilon Q_1 + I^2 R t = Q_1 \left(\varepsilon + \frac{RQ_1}{t}\right).$$

Для зарядки двумя генераторами:

$$mgH \approx \varepsilon Q_2 + 2I'^2 R t' = \varepsilon Q_2 + \frac{1}{2} I^2 R t' = Q_2 \left(\varepsilon + \frac{RQ_1}{2t}\right).$$

(здесь мы использовали соотношение $Q_1/t \approx Q_2/t'$). Сопоставляя два выражения для mgH, находим, что

$$Q_2 = Q_1 \cdot \frac{2(\varepsilon t + RQ_1)}{2\varepsilon t + RQ_1} = Q_1 \cdot \frac{2x+2}{2x+1},$$

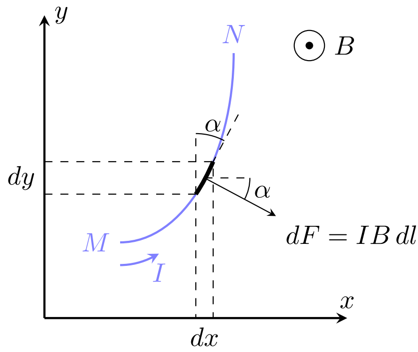
где введено обозначение $x \equiv \dfrac{\varepsilon t}{RQ_1}$. Отметим, что эта величина как раз и равна отношению силы тока через неподвижный ротор ($I_0 = \varepsilon/R$) к силе тока зарядки. Из полученного соотношения выражаем

$$\frac{I_0}{I} = x = \frac{2Q_1 - Q_2}{2Q_2 - 2Q_1} = 1.$$

Повторив аналогичные рассуждения для случая трех генераторов, получим

$$Q_3 = Q_1 \cdot \frac{3x+3}{3x+1} = \frac{3Q_1 Q_2}{4Q_1 - Q_2} = 450\,\text{мА} \cdot \text{час}.$$

Задача №11-Т4. Петля с током



Чтобы найти силу, с которой однородное магнитное поле воздействует на проводник MN с током, имеющий сложную форму, возьмём маленький участок проводника длины dl. Сила, действующая на него, равна $dF = IB\,dl$ и направлена перпендикулярно (см. рис.). Проекции этой силы на оси координат равны

$$dF_x = IB\,dl\cos\alpha = IBdy,$$

$$dF_y = -IB\,dl\sin\alpha = -IBdx.$$

Таким образом, суммируя по всем участкам проводника, получим, что

$$F_x = IB(y_N - y_M), \qquad F_y = -IB(x_N - x_M),$$

где $(x_M; y_M)$ и $(x_N; y_N)$ — координаты точек M и N соответственно.

Пусть T_A — сила натяжения нити в верхней точке, а $\rho = m/L$ — линейная плотность нити. Рассмотрим правую половину нити и запишем условия равновесия для сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} T_A\cos 30^\circ = mg/2, \\ T_A\sin 30^\circ + T_D = IBH \end{cases}$$

Отсюда найдём

$$\begin{cases} T_A = mg/\sqrt{3}, \\ T_A/2 + T_D = IBL\cdot\sqrt{3}/4 \end{cases}$$

Применяя метод виртуальных перемещений, получим

$$T_A - T_D = \rho g H = \frac{mgH}{L} = \frac{mg\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда следует, что

$$T_A - T_D = \frac{3T_A}{4} \quad\Rightarrow\quad T_A = 4T_D \quad\Rightarrow\quad T_D = \frac{IBL}{4\sqrt{3}},$$

$$mg = \sqrt{3}T_A = 4\sqrt{3}T_D = IBL \quad\Rightarrow\quad m = \frac{IBL}{g}.$$

Рассмотрим участок нити CD и запишем условие равновесия для сил в проекции на горизонтальную ось:

$$T_D = IBh,$$

где h — высота точки C относительно точки D, равная, соответственно,

$$h = \frac{T_D}{IB} = \frac{L}{4\sqrt{3}}.$$

С другой стороны, применяя метод виртуальных перемещений, получим

$$T_C - T_D = \rho g h \quad \Rightarrow \quad T_C - T_D = \frac{\rho g}{IB} \cdot T_D = \frac{mg}{IBL} \cdot T_D = T_D \quad \Rightarrow T_C = 2T_D = \frac{IBL}{2\sqrt{3}}.$$

Пусть K — некоторая точка, находящаяся на высоте y относительно точки D и смещённая относительно неё на x вправо. Обозначим T силу натяжения нити в точке K, φ — угол между касательной в точке K и горизонталью, а l — длину участка KD. Тогда

$$T\sin\varphi = \rho g l + IBx = IB(l + x),$$

$$T\cos\varphi = T_D - IBy,$$

$$T = T_D + \rho g y = T_D + IBy.$$

Дифференцируя первое уравнение и учитывая, что $dl = dx/\cos\varphi = dy/\sin\varphi$, получим

$$d(T\sin\varphi) = IB(dl + dx) = IBdy \cdot \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

С другой стороны,

$$T(1+\cos\varphi) = 2T_D,$$

откуда имеем

$$T\sin\varphi \cdot d(T\sin\varphi) = 2T_D \cdot IBdy \quad \Rightarrow \quad \frac{(T\sin\varphi)^2}{2} = 2T_D \cdot IBy \quad \Rightarrow$$

$$T\sin\varphi = 2IB\sqrt{hy}.$$

Учитывая, что $\operatorname{tg}\varphi = dy/dx$, окончательно получим значение d:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2IB\sqrt{hy}}{IB(h-y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{2} = \frac{1}{\sqrt{h}}\int\limits_0^h \frac{h-y}{2\sqrt{y}} \cdot dy = h - \frac{1}{3}h = \frac{2}{3}h \quad \Rightarrow$$

$$d = \frac{4h}{3} = \frac{L}{3\sqrt{3}}.$$

Задача №11-Т5. Я надел свои очки

Обозначим реальный размер очков за X, а реальный размер смартфона за Y. Пусть также α — угловой размер изображения очков на портретной фотографии, а β — угловой размер изображения смартфона на ней. Измерим отношение размеров изображений очков и смартфона на двух фотографиях.

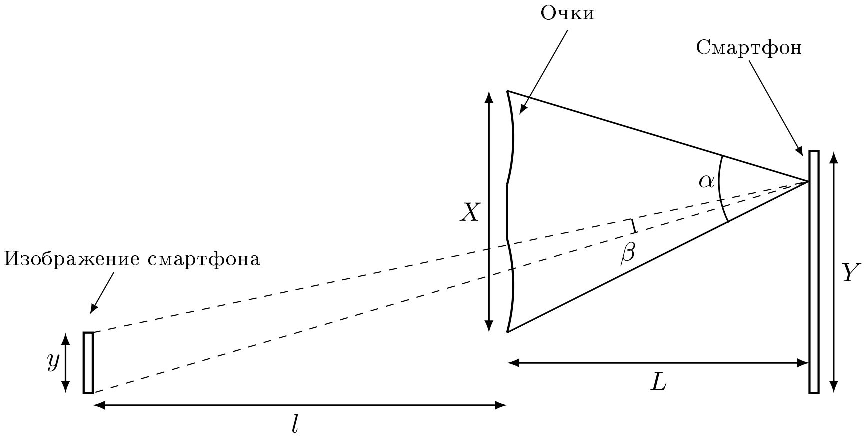
$$\frac{X}{Y} = (1{,}1 \pm 0{,}1); \quad \frac{\alpha}{\beta} = (12 \pm 1);$$

На левой фотографии отношение размеров изображений соответствует отношению реальных размеров, а на правой отношению угловых размеров изображений.

Размеры изображений.

Сделаем простейший чертеж расположения изображения смартфона и очков на правой фотографии. Обозначим размер изображения смартфона за y, расстояние между изображением смартфона и очками за l. Угловые размеры изображения смартфона и очков на правой фотографии в приближении малых углов даются формулами:

$$\alpha = \frac{X}{L}; \quad \beta = \frac{y}{L + l}. \tag{1}$$



Положение изображений смартфона и очков.

Положение изображения определяется формулой сферического зеркала:

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{l} = -\frac{2}{R}, \tag{2}$$

где R — радиус кривизны зеркала. Размер изображения смартфона связан с его реальным размером через увеличение зеркала:

$$y = Y\frac{l}{L}. \tag{3}$$

Объединяя уравнения получим:

$$R = \frac{2L}{\frac{\alpha}{\beta}\frac{Y}{X} - 2}. \tag{4}$$

Рассчитаем с учетом погрешности измерений минимально возможное значение радиуса кривизны и максимально возможное:

$$R_{min} = \frac{2 \cdot 50 \text{ см}}{\frac{13}{1} - 2} = 9{,}09 \text{ см}.$$

$$R_{max} = \frac{2 \cdot 50 \text{ см}}{\frac{11}{1{,}2} - 2} = 12{,}24 \text{ см}.$$

Тогда окончательное значение радиуса кривизны с учетом погрешностей измерений:

$$R = (10{,}7 \pm 1{,}6) \text{ см}.$$