Региональный этап — день 1

Условия задач, решения и критерии оценивания. 11 класс

Содержание

11.1. Считаем сверхновые

П.В.Бакланов

Статистика наблюдений сверхновых гласит, что в течение 18 месяцев в 2023–2024 годах было открыто 3156 сверхновых типа Ia и 869 сверхновых типа II. В то же время теоретическое моделирование показывает, что 24% вспышек сверхновых относятся к типу Ia, а 57% вспышек — к типу II. Можно считать, что в пределах одного типа сверхновых их абсолютная звездная величина в максимуме блеска одинакова, сверхновые распределены в пространстве равномерно и изотропно.

Воспользовавшись этими данными, определите, какие сверхновые ярче. На сколько звездных величин абсолютная звездная величина сверхновых подтипа Ia в максимуме блеска отличается от аналогичной величины для сверхновых типа II?

Решение. Значения $p_1 = 24\%$ и $p_2 = 57\%$ дают нам информацию о распределении сверхновых по типам в единице объема. Это условие можно сформулировать следующим образом: число сверхновых i-го типа в некотором объеме Вселенной V_0 равно

$$N_i = p_i \cdot n_0 \cdot V_0,$$

где n_0 — концентрация всех сверхновых в единице объема.

Для наблюдателя на Земле, считающего сверхновые на небе, доступный для наблюдений объем имеет форму шара и равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — предельное расстояние, на котором он способен открыть сверхновую данного типа в ее максимуме блеска. Тогда отношение числа открытых сверхновых разных типов равно

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{p_1 \cdot n_0}{p_2 \cdot n_0}\frac{R_1^3}{R_2^3}. \tag{1}$$

Разумно предположить, что предельная освещенность, создаваемая сверхновой, которую способен зарегистрировать наблюдатель на Земле, не зависит от типа сверхновой. Запишем связь между предельной освещенностью E, светимостью сверхновой L и предельным расстоянием R

$$E = \frac{L}{4\pi R^2}$$

и приравняем освещенности, создаваемые наиболее удаленными сверхновыми каждого типа:

$$\frac{L_1}{4\pi R_1^2} = \frac{L_2}{4\pi R_2^2}.$$

Отсюда получаем, что отношение светимостей сверхновых разных типов будет равно квадрату отношения предельных расстояний, с которых эти сверхновые могут быть обнаружены

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2.$$

Отношение расстояний мы можем получить из выражения (1), тогда

$$\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}\right)^{2/3}. \tag{2}$$

Тогда искомая разность абсолютных звездных величин равна:

$$\Delta M = M_1 - M_2 = -2.5 \lg \frac{L_1}{L_2} = -\frac{5}{3} \lg \left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}\right).$$

Осталось провести вычисления:

$$\Delta M = -\frac{5}{3}\lg\left(\frac{3156}{869}\cdot\frac{0.57}{0.24}\right) \approx -1^m.6.$$

Таким образом, сверхновые типа Ia ярче сверхновых типа II примерно на $1^m.6$.

Критерии оценивания.

К1. Явно или неявно сделанный вывод о том, что предельная освещенность (видимая звездная величина) при наблюдении сверхновых не зависит от их типа **2**
К2. Получение формулы (1) или ее верного аналога (например, в виде пропорциональности) **4**
К3. Получение формулы (2) или ее верного аналога **4**
К4. Вывод о том, что сверхновые типа Ia ярче **2**
К5. Правильный численный ответ (допустимы значения $|\Delta M| = 1^m.6 \pm 0^m.1$) **4**
Максимальная оценка: **16**

11.2. Зависит от точки зрения

А.В.Веселова

Земляне проводят наблюдения астероида. Известно, что его орбитальный период составляет 8 лет, эксцентриситет орбиты равен 0.4, а ее наклон составляет 40°. Астероид наблюдается в афелии орбиты, расположенном симметрично относительно линии узлов (прямой, являющейся пересечением плоскостей орбит Земли и астероида). Какой может быть наблюдаемая (геоцентрическая) эклиптическая широта астероида в этот момент?

Решение. Поскольку точка афелия симметрична относительно линии узлов, это означает, что в афелии астероид находится не только дальше всего от Солнца, но и дальше всего от плоскости эклиптики. Пусть для определенности астероид находится над плоскостью эклиптики, в противном случае мы получим симметричный с точностью до знака набор ответов.

Определим большую полуось орбиты, а затем поймем, вне или внутри земной орбиты находится проекция афелия на плоскости эклиптики:

$$(T[\text{годы}])^2 \equiv (a[\text{а. е.}])^3 \quad \Rightarrow \quad a = 4\,\text{а. е.}$$

Расстояние от Солнца до проекции точки афелия на плоскость эклиптики составит

$$R_\alpha = r_\alpha \cos i = a(1+e)\cos i = 4 \cdot (1+0.4)\cos 40^\circ = 4.3 \text{ а. е.}$$

Следовательно, проекция афелия находится вне орбиты Земли. В таком случае (см. чертеж) максимальное и минимальное значения эклиптической широты будут соответствовать максимальному и минимальному удалению наблюдателя от астероида.

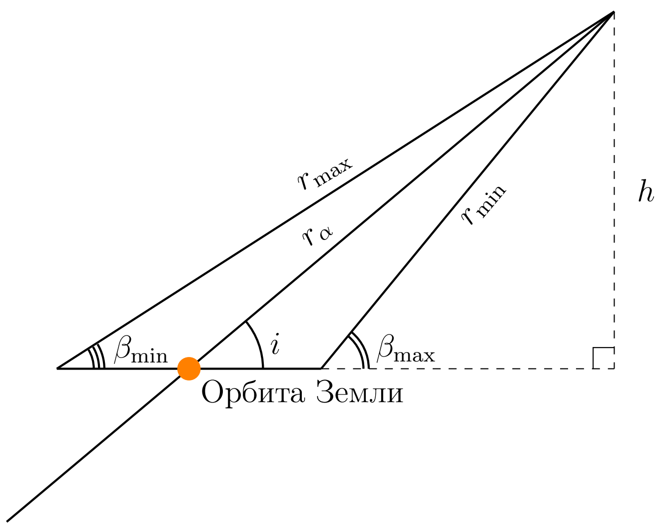

Рис. 1: Чертеж к решению задачи 2.

Максимальное значение эклиптической широты найдем таким образом: определим расстояние от Земли до астероида по теореме косинусов, затем по теореме синусов оценим широту.

$$r_{\min} = \sqrt{r_\alpha^2 + a_\oplus^2 - 2r_\alpha \cdot a_\oplus \cos i} = \sqrt{5.6^2 + 1^2 - 2 \cdot 5.6 \cdot 1 \cdot \cos 40^\circ} = 4.9 \text{ а. е.},$$

$$\frac{\sin(180^\circ - \beta_{\max})}{r_\alpha} = \frac{\sin i}{r_{\min}} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta_{\max} = \frac{r_\alpha}{r_{\min}} \cdot \sin i \quad \Rightarrow \quad \beta_{\max} = 47^\circ.$$

Аналогично определим минимальное значение эклиптической широты:

$$r_{\max} = \sqrt{r_\alpha^2 + a_\oplus^2 - 2r_\alpha \cdot a_\oplus \cos(180^\circ - i)} = \sqrt{5.6^2 + 1^2 - 2 \cdot 5.6 \cdot 1 \cdot \cos 140^\circ} = 6.4\,\text{а. е.},$$

$$\frac{\sin\beta_{\min}}{r_\alpha} = \frac{\sin i}{r_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta_{\min} = \frac{r_\alpha}{r_{\max}} \cdot \sin i \quad \Rightarrow \quad \beta_{\min} = 34^\circ.$$

Таким образом, при расположении афелия над плоскостью эклиптики диапазон наблюдаемых эклиптических широт составит $[34^\circ; 47^\circ]$, а с учетом расположения афелия под плоскостью эклиптики диапазон примет вид $[-47^\circ; -34^\circ] \cup [34^\circ; 47^\circ]$.

Критерии оценивания.

К1. Вычисление радиуса орбиты, получение верного ответа **2**
К2. Верное понимание наклона орбиты (угол с центром в Солнце) **1**
К3. Верный расчет (или верная формула) для расстояния от Солнца до астероида в афелии **1**
К4. Верное понимание и указание конфигураций, при которых достигаются наименьшая и наибольшая широты (по модулю или просто положительные) **2**
К5. Геометрические построения и/или верные формулы для получения граничных значений широты **5**
К6. Расчет верных значений максимальной и минимальной широт (по модулю или просто положительных), допустима погрешность $\pm 1^\circ$ .... **1+1**
К7. Указание интервала для широт вместо отдельных граничных значений **1**
К8. Верный учет отрицательных широт (явное указание соответствующего интервала в качестве части ответа) **2**
Максимальная оценка: 16

11.3. Усыхающий Нептун

П.А. Тараканов

Известно, что Нептун излучает в единицу времени в 2.5 раза больше энергии, чем получает от Солнца. Оцените, на какую величину изменяется радиус Нептуна за один его оборот вокруг Солнца, если известно, что вид зависимости плотности от радиуса у него при этом не изменяется. Радиус Нептуна равен 25 тыс. км, масса — $1.0 \cdot 10^{26}$ кг. Можно считать, что Нептун является абсолютно черным телом, а радиус его орбиты вокруг Солнца равен 30 а.е.

Решение. Поскольку Нептун является планетой (а не звездой и не бурым карликом), то источником дополнительной энергии термоядерный синтез в нем служить не может. Выделение энергии за счет радиоактивного распада тяжелых ядер у планет пренебрежимо мало, и единственным источником дополнительной энергии может являться только постепенное сжатие Нептуна, которое и приводит к изменению его радиуса.

Потенциальная энергия Φ самогравитирующего газового шара может быть выражена как

$$\Phi = -\varkappa \frac{GM^2}{R}, \tag{3}$$

где M — масса шара, R — его радиус, $\varkappa$ — коэффициент, зависящий от распределения плотности внутри шара, во всех «естественных» случаях $\varkappa \approx 1$.

Поскольку сжатие происходит медленно, то в каждый момент времени для Нептуна выполняется вириальное соотношение $2U + \Phi = 0$ (тут U — внутренняя энергия Нептуна) и $U = -\frac{\Phi}{2}$, откуда следует, что только половина выделяющейся при сжатии энергии будет расходоваться на излучение, а вторая половина — на нагрев Нептуна, поскольку и изменения энергий связаны так же, $dU = -\frac{d\Phi}{2}$.

Получим зависимость изменения радиуса от изменения потенциальной энергии, продифференцировав соотношение (3):

$$d\Phi = \varkappa \frac{GM^2}{R^2}\, dR$$

или, считая оба изменения положительными величинами (хотя и потенциальная энергия, и радиус уменьшаются),

$$\Delta\Phi = \varkappa \frac{GM^2}{R^2}\, \Delta R.$$

Заметим, что тот же результат можно получить и путем вычитания друг из друга значений потенциальной энергии для R и $R - \Delta R$, а затем отбрасывания малых членов, но так эффективнее.

По условию энергия ΔE, получаемая Нептуном от Солнца за один его оборот вокруг Солнца, будет связана с $\Delta\Phi$ как

$$(2.5 - 1) \cdot \Delta E = \frac{\Delta\Phi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi = 3\Delta E.$$

Эта же энергия, поскольку Нептун по условию абсолютно черное тело, может быть выражена как

$$\Delta E = \frac{L_\odot}{4\pi r^2} \cdot \pi R^2 \cdot P,$$

где $L_\odot$ — светимость Солнца, r — радиус орбиты Нептуна, P — орбитальный период Нептуна. Тогда

$$\Delta R = \frac{R^2\, \Delta\Phi}{\varkappa GM^2} = \frac{3L_\odot R^4 P}{4r^2 \varkappa GM^2}.$$

Для вычислений осталось определить некоторые недостающие параметры. Коэффициент $\varkappa$ можно принять равным 1, а орбитальный период Нептуна либо вспомнить (165 лет), либо вычислить из III закона Кеплера как $P = 30^{3/2}$ лет, что составляет $P = 5.2 \cdot 10^9$ с.

Окончательно вычисляем (все величины в СИ)

$$\Delta R = \frac{3 \cdot 3.9 \cdot 10^{26} \cdot (25 \cdot 10^6)^4 \cdot 5.2 \cdot 10^9}{4 \cdot (30 \cdot 1.5 \cdot 10^{11})^2 \cdot 6.7 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{52}} \approx 0.044 \text{ м} \approx 4 \text{ см}.$$

Итого за один оборот вокруг Солнца радиус Нептуна уменьшается примерно на 4 см.

Критерии оценивания.

К1. Утверждение о гравитационном сжатии как источнике энергии **3**
Если участник его использует, но никак не формулирует **2**
К2. Выражение (3), явно записанное или неявно используемое **1**
К3. Связь $\Delta\Phi$ и ΔR, полученная любым способом **2**
К4. Выражение (или вычисление) энергии ΔE **2**
К5. Учет вириального соотношения, достаточен результат **2**
При его отсутствии все остальные части решения оцениваются полным баллом (итоговый ответ при этом должен уменьшиться в 2 раза).
К6. Оценка коэффициента $\varkappa = 1$ **2**
Если участник использует значение для однородного шара $\varkappa = 3/5$ **1**
К7. Знание или вычисление орбитального периода Нептуна **2**
К8. Правильный итоговый ответ (достаточна порядковая точность, $1 \div 10$ см) **2**
Максимальная оценка: **16**

Если в решении явно указано, что радиус Нептуна *увеличивается*, то за все решение выставляется не более **4** баллов.

11.4. Не эта эпоха

В.В.Григорьев

Звезда Завийява (η Девы) на эпоху J2000.0 имеет экваториальные координаты $\alpha = 11^h50^m44^s$, $\delta = +1°45'43''$. Ее собственное движение $\mu = 0''.7886$/год с позиционным углом $\gamma = 110°$ (позиционный угол отсчитывается от направления на Северный полюс мира в сторону увеличения прямого восхождения). Определите экваториальные координаты Завийявы для эпохи J2050.0. Нутацией пренебречь.

Решение. Координаты Завийявы будут изменяться вследствие двух причин: собственного движения (красная стрелка на рисунке ниже), а также прецессии оси вращения Земли, то есть смещения точки весеннего (и осеннего) равноденствия вдоль эклиптики (темно-синяя стрелка, длины стрелок не в масштабе), нутацией по условию мы пренебрегаем. Синей прерывистой линией изображена граница между созвездиями Дева и Лев, тонким пунктиром показана экваториальная сетка на эпоху J2000.0: по вертикали отложено склонение, по горизонтали — прямое восхождение (увеличивающееся справа налево).

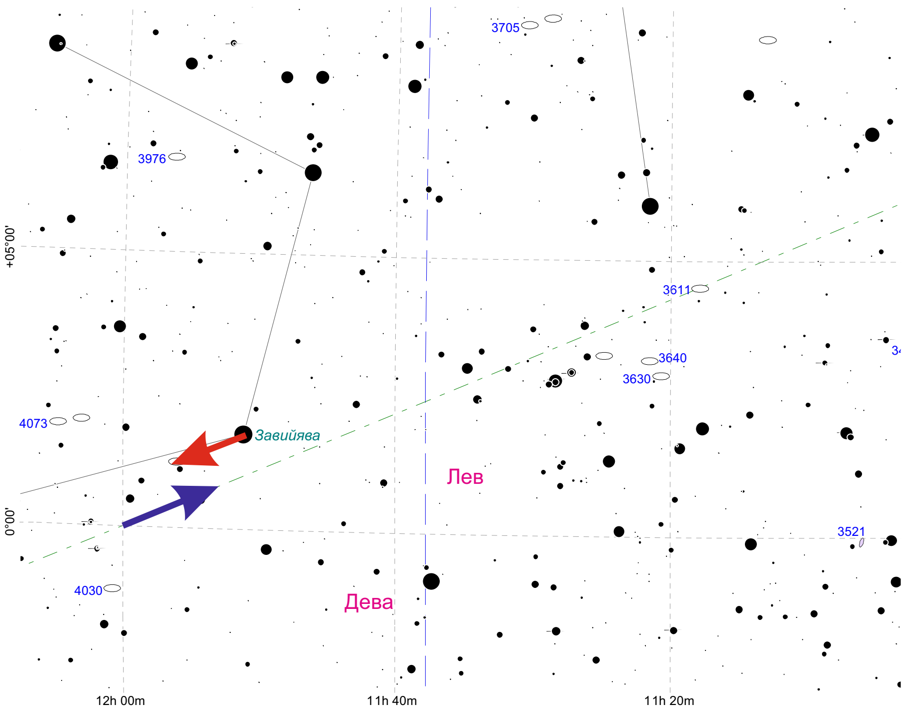

Рис. 2: К решению задачи 4.

Звезда находится практически точно в точке осеннего равноденствия — точке пересечения небесного экватора и эклиптики (штрих-пунктирная зеленая линия), которая движется вдоль эклиптики со скоростью $\zeta = 50''.23$/год за счет прецессии оси вращения Земли (происходит с периодом около 25800 лет, откуда величину ζ можно получить как угол, равный 1/25800 доле угла 360°) в сторону созвездия Льва. Поэтому будем считать, что координаты всех близлежащих звезд будут изменяться согласно этому же закону.

Сначала вычислим компоненты собственного движения. Косинусом склонения в данном случае можно пренебречь, т.к. склонение звезды мало (а косинус очень близок к единице), а собственное движение будет менять лишь доли угловой секунды:

$$\begin{cases} \mu_\alpha = \mu \sin\gamma = 0''.741/\text{год} \\ \mu_\delta = \mu \cos\gamma = -0''.270/\text{год} \end{cases}$$

Теперь займемся прецессией. Она изменяет координаты звезд в обратную сторону, чем, фактически, обеспечивает дополнительное собственное движение Завийявы примерно в ту же сторону, куда направлено и истинное (поскольку перемещение точки осеннего равноденствия происходит в сторону, обратную собственному движению звезды). Скорость изменения координат звезды вследствие прецессии вычисляется так:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_\alpha = \zeta \cos\varepsilon = 46''.085/\text{год} \\ \hat{\mu}_\delta = -\zeta \sin\varepsilon = -19''.980/\text{год} \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon = 23°26'22''$ — наклон небесного экватора к эклиптике на эпоху J2000.0, который указан в справочных данных.

Осталось лишь вычислить новые координаты (α', δ') звезды через $t = 50$ лет после введения эпохи J2000.0, не забыв, что собственное движение по прямому восхождению мы выражали в секундах дуги и соответствующие величины надо перевести в секунды времени:

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + (\hat{\mu}_\alpha + \mu_\alpha)t \\ \delta' = \delta + (\hat{\mu}_\delta + \mu_\delta)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = 11^h50^m44^s + (46''.085 + 0''.741) \cdot 50 \times \left(\frac{1}{15}\right)^{s/''} = 11^h50^m44^s + 156^s \\ \delta' = 1°45'43'' + (-19''.980 - 0''.270) \cdot 50 = 1°45'43'' - 1012''.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha' = 11^h50^m44^s + 2^m36^s = 11^h53^m20^s \\ \delta' = 1°45'43'' - 16'52''.5 = +1°28'51'' \end{cases}$$

Критерии оценивания.

К1. Понимание необходимости учета прецессии **2**
К2. Вычисление (или знание) значения постоянной прецессии ζ (допустима погрешность $\pm 0''.2$/год) **2**
К3. Правильные абсолютные значения (для соответствующей величины правильно указано не менее 2 значащих цифр) μ_α, μ_δ, $\hat{\mu}_\alpha$, $\hat{\mu}_\delta$ .... **1+1+1+1**
К4. Правильные знаки μ_α, μ_δ, $\hat{\mu}_\alpha$, $\hat{\mu}_\delta$ .... **1+1+1+1**
К5. Правильное итоговое значение α' (допустима погрешность $\pm 5^s$) **2**
К6. Правильное итоговое значение δ' (допустима погрешность $\pm 5''$) **2**
Максимальная оценка: **16**

Если участник в выражениях для μ_α, μ_δ, $\hat{\mu}_\alpha$, $\hat{\mu}_\delta$ меняет местами синусы и косинусы, то в критерии К3 за каждую ошибочную пару выставляется **1** балл вместо **2**, баллы по критериям К5 и К6 не выставляются.

11.5. Спектральный вальс

М.В.Костина

Вам дано изображение газового диска, окружающего сверхмассивную черную дыру в центре галактики, а также два спектра, полученных для областей, отмеченных окружностями на изображении. Попавшая на спектры линия излучения — это линия [OIII] с лабораторной длиной волны 5007 Å, в двух отмеченных областях (№1 и №2) ее длина волны достигает минимального и максимального значений для всего диска. Известно также, что угол между плоскостью диска и лучом зрения близок к 0°.

Зная, что угловые размеры приведенного изображения на небе составляют $5'' \times 5''$, определите массу черной дыры, выразив ее в массах Солнца. Пекулярную скорость галактики можно считать нулевой.

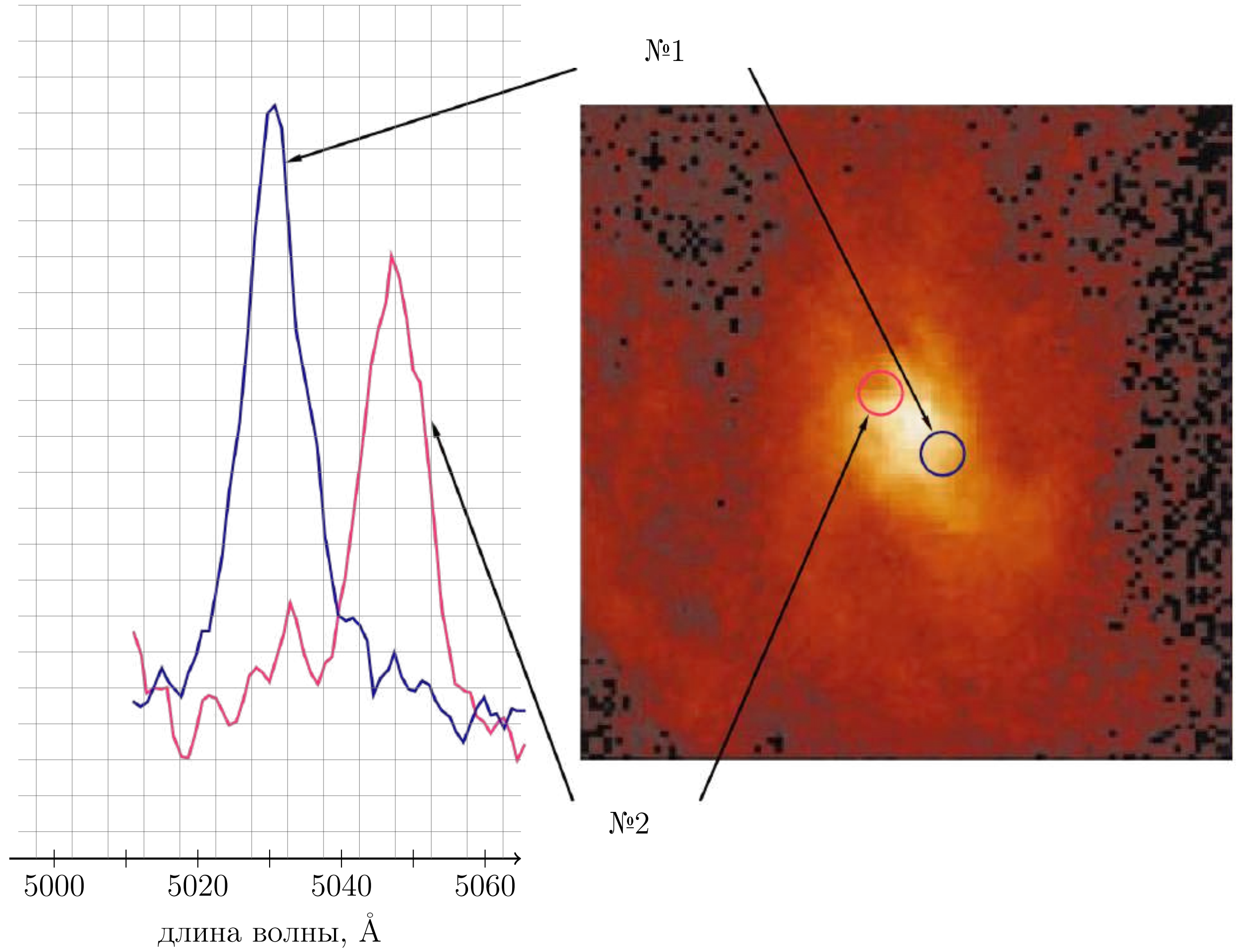

Рис. 3: Изображение к задаче 5.

Решение. Поскольку частицы диска движутся вокруг черной дыры с круговой скоростью

$$v^2 = \frac{GM}{R},$$

то масса центральной черной дыры будет равна

$$M = \frac{v^2 R}{G}.$$

Так как требуется найти массу в массах Солнца — $M_\odot$, то удобнее воспользоваться естественными для этой задачи единицами измерения: $M_\odot$, а.е., год. В этих единицах

$G = 4\pi^2$ а.е.^{3} год$^{-2}$ $M_\odot^{-1}$ (в чем несложно убедиться, записав III закон Кеплера для системы «Солнце–Земля») и

$$M[M_\odot] = \frac{1}{4\pi^2} \cdot v^2[\text{а.е./год}] \cdot R[\text{а.е.}].$$

Нам нужно найти радиус диска R и скорость вращения его частиц на этом радиусе v. Скорость определим по спектру в левой части рисунка. По условию длины волн линий λ_1 и λ_2 соответствуют экстремальным отклонениям лучевой скорости от среднего значения и луч зрения лежит в плоскости диска. Это означает, что мы наблюдаем один край диска, приближающийся к нам с круговой скоростью, а другой — удаляющийся с такой же скоростью (и при этом весь диск как целое также движется относительно нас). Тогда круговой скорости диска будет соответствовать смещение одной из линий, например Δz_2, относительно средней длины волны $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$.

$$v = c\,\Delta z_2 = c\,\frac{\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)/2}{(\lambda_1 + \lambda_2)/2} = c\,\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Если произвести аналогичную выкладку для Δz_1, получится, естественно, такой же по модулю, но отрицательный результат.

По спектру находим $\lambda_1 = 5030$ Å и $\lambda_1 = 5047$ Å. Скорость света в единицах а.е./год равна

$$c = 2\pi \cdot \frac{3 \cdot 10^5 \text{ км/с}}{30 \text{ км/с}} = 6.3 \cdot 10^4 \text{ а.е./год}$$

(поскольку Земля с орбитальной скоростью 30 км/с проходит за год 2π а.е.). Вычисляем круговую скорость для диска:

$$v = 6.3 \cdot 10^4 \cdot \frac{5047 - 5030}{5047 + 5030} \approx 106 \text{ а.е./год}.$$

Угловой радиус диска найдем по правой части рисунка. Определим масштаб изображения. Сторона квадрата равна 83 мм, значит в одном миллиметре $5/83 \approx 0''.06$. Расстояние между областями, для которых получены спектры, на снимке равно 11 мм, следовательно угловое расстояние между ними на небе равно $0''.66$. угловой радиус диска равен половине расстояния между его диаметрально противоположными точками, т.е. $0''.33$.

Для того, чтобы получить радиус в линейных единицах, нужно знать расстояние до галактики. Его можно получить, зная красное смещение z. Так как по условию пекулярная скорость галактики нулевая, то скорость центра диска обусловлена только космологическим расширением, а соответствующее ей красное смещение подчиняется закону Хаббла:

$$cz = Hr,$$

где c — скорость света в км/с, $H \approx 70$ км/с/Мпк — постоянная Хаббла, r — искомое расстояние в Мпк.

Так как линии в спектре расположены симметрично, то средняя длина волны будет соответствовать положению линии в центре диска. Красное смещение этой средней и будет общим космологическим красным смещением галактики. Среднее арифметическое длин волн линий в спектре равно $\lambda = 5038.5$ Å, а лабораторная длина волны $\lambda = 5007$ Å. Следовательно, красное смещение галактики

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{5038.5 - 5007}{5007} \approx 0.0063.$$

Отсюда находим расстояние до нее:

$$r = \frac{cz}{H} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0.0063}{70} \approx 27 \text{ Мпк} = 27 \cdot 10^6 \text{ пк}.$$

Как известно, 1 а.е. с расстояния в 1 пк видна под углом в $1''$, следовательно, $0''.33$, видимым с расстояния в 1 пк, соответствуют 0.33 а.е., а с расстояния в $27 \cdot 10^6$ пк — $0.33 \cdot 27 \cdot 10^6 = 8.9 \cdot 10^6$ а.е. Это и есть искомый радиус диска.

Окончательно находим массу черной дыры:

$$M = \frac{1}{4\pi^2} v^2 \cdot R = \frac{1}{4\pi^2} \cdot 8.9 \cdot 10^6 \cdot (106)^2 = 2.5 \cdot 10^9 M_\odot.$$

Отметим также, что все промежуточные вычисления можно выполнять и в любой другой системе единиц (в том числе в СИ), а затем перевести в массы Солнца, итоговый результат от этого, естественно, не поменяется.

Критерии оценивания.

K1. Выражение для массы черной дыры через круговую скорость диска **2**
K2. Определение λ_1 и λ_2 по спектру на рисунке .... **1+1**
K3. Вычисление скорости вращения диска **4**
K4. Определение углового радиуса диска по рисунку **2**
Если вместо радиуса определен и дальше используется диаметр, то оценка за этот пункт — **1** балл.
K5. Понимание того, что красное смещение галактики равно смещению для среднего арифметического λ_1 и λ_2 .... **2**
K6. Вычисление расстояния до галактики **3**
K7. Вычисление (любым способом) линейного радиуса диска **2**
K8. Вычисление массы черной дыры **3**
Если ответ для массы дан не в массах Солнца, то оценка снижается на **1** балл.
Максимальная оценка: 20