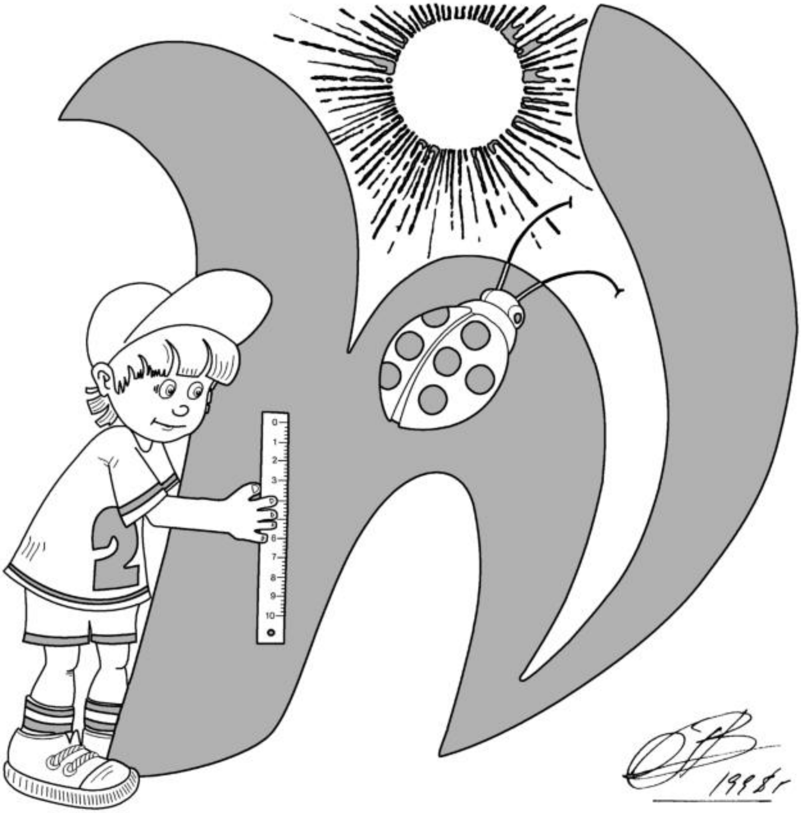
Министерство просвещения Российской Федерации
Центральная предметно-методическая комиссия
Всероссийской олимпиады школьников по физике

Всероссийская олимпиада школьников по физике

Региональный этап

Теоретический тур



Москва, 2026 г.

Комплект задач подготовлен
центральной предметно-методической комиссией
Всероссийской олимпиады школьников по физике
E-mail: **physolymp@gmail.com**

Авторы задач

Теоретический тур

7-9 класс

- **7-Т1**. Александр Евсеев
- **7-Т2**. Никита Богословский
- **7-Т3**. Александр Евсеев
- **7-Т4**. Антон Сорокин
- **8-Т1**. Александр Евсеев, Сергей Абдрашитов
- **8-Т2**. Олег Порошин
- **8-Т3**. Ольга Инишева
- **8-Т4**. Денис Рубцов
- **9-Т1**. Александр Ершов
- **9-Т2**. Денис Рубцов
- **9-Т3**. Александр Аполонский, Александр Ершов
- **9-Т4**. Александр Аполонский, Антон Вергунов
- **9-Т5**. Денис Рубцов, Александр Ершов

10-11 класс

- **10-Т1**. Григорий Расторгуев, Иван Гурьянов
- **10-Т2**. Александр Аполонский, Александр Киреев
- **10-Т3**. Николай Янушкевич
- **10-Т4**. Александр Аполонский, Иван Юдин
- **10-Т5**. Алексей Заяц
- **11-Т1**. Иван Гурьянов
- **11-Т2**. Николай Янушкевич
- **11-Т3**. Денис Рубцов
- **11-Т4**. Григорий Расторгуев
- **11-Т5**. Александр Воронцов

Как готовиться к региональному этапу?

В МФТИ запущен классный проект «Физтех-регионам» (https://os.mipt.ru), где в публичном бесплатном доступе лежат лекции и семинары по всем классам и по всем темам. Там же выложены подборки задач по темам. Уровень материалов позволяет хорошо подготовиться к муниципальному и региональному этапу Всероссийской олимпиады школьников по физике.

В этом году в рамках работы проекта сняты видео-решения (https://os-lms.mipt.ru/course/view.php?id=21) теоретического тура регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по физике. Используйте эти материалы для самоподготовки к будущим олимпиадам.

7 класс

Задача №1. Васина ванна

Васин дом, почта и школа, в которой он учится, находятся на одной прямой улице. Однажды, выходя из школы, Вася понял, что уроки сильно утомили его, и ему очень хочется принять ванну. Он позвонил домой маме и попросил ее включить воду, чтобы ванна наполнилась быстрее. Мама сразу же открыла кран и ушла по делам. К моменту Васиного прихода домой восьмая часть ванны была наполнена. Спустя 10 мин после прихода домой Вася вспомнил, что в школе осталось письмо, которое надо было сегодня обязательно отнести на почту. Он тут же вышел из дома. К моменту, когда он дошел до школы, ванна заполнилась наполовину. В школе Вася не задерживался: быстро забрал письмо и отправился на почту. Когда же он добрался до нее, ванна заполнилась уже на 3/4. На почте он также не задерживался и отправился домой. Вернувшись, Вася обнаружил на полу внушительную лужу.

1. Определите объемный расход воды μ, поступающей в ванну из крана, если объем ванны $V = 400$ л.

2. Сколько воды успело вылиться на пол к моменту возвращения Васи домой?

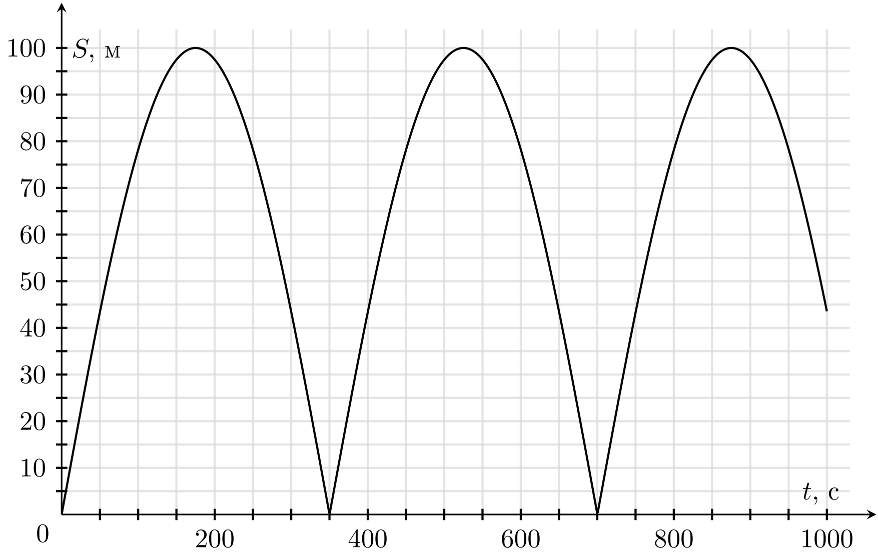
3. Во сколько раз быстрее надо было двигаться Васе после выхода из дома, чтобы успеть вернуться домой точно к моменту заполнения ванны?

Считайте, что Вася шел всегда с одинаковой скоростью и только вдоль улицы.

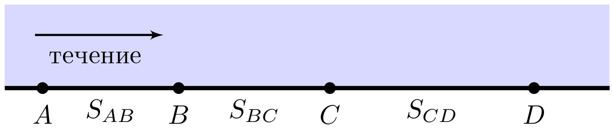
Задача №2. Тренировка

Беговая дорожка стадиона имеет вид окружности. Во время тренировки два спортсмена бежали по ней в одном направлении, каждый со своей постоянной скоростью. Спортсмены использовали маячки, которые передавали их координаты в компьютер тренера. Компьютер рассчитывал расстояние между бегунами, но из-за неправильно настроенного режима работы вычислял расстояние по прямой, а не вдоль беговой дорожки. На графике показана рассчитанная компьютером зависимость расстояния между спортсменами от времени на некотором этапе тренировки. Известно, что спортсмены начали и закончили тренировку одновременно, и за все время тренировки пробежали дистанции $S_1 = 12$ км и $S_2 = 9$ км 840 м соответственно.

Какие скорости были у спортсменов?



Задача №3. Четыре пристани



Четыре населенных пункта A, B, C и D располагаются на берегу одной реки, как показано на рисунке, причем S_{AB} равно S_{BC} .

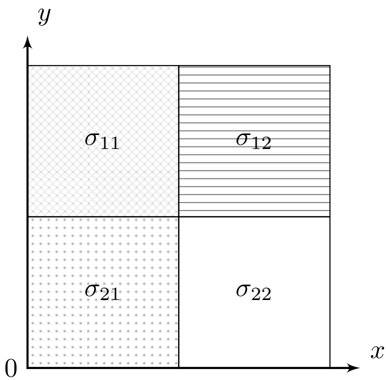
От пристани B одновременно отправляются моторная лодка к пристани A и катер — к пристани D. Скорости моторной лодки и катера относительно воды постоянны и равны v и $2v$ соответственно. Моторная лодка прибывает в A спустя время τ, сразу же разворачивается и без остановок плывет в D. Еще через время τ лодка встречает точно у пристани C катер, который, доплыв до D, тоже сразу развернулся и так же без остановок отправился в A.

1. Найдите скорость течения реки u.

2. Найдите расстояния S_{AB} и S_{CD}.

3. Спустя какое время T после своей встречи катер и лодка снова встретятся, если в конечных пунктах своих маршрутов опять не задерживаясь развернутся и отправятся навстречу друг другу?

Задача №4. Пластинка



Пластина состоит из четырёх квадратов одинаковой толщины со стороной $a = 1$ м каждый, сделанных из разных материалов. Квадраты однородны, а их поверхностные плотности различны:

- левый верхний квадрат: $\sigma_{11} = 400$ г/м^2;
- правый верхний квадрат: $\sigma_{12} = 240$ г/м^2;
- левый нижний квадрат: $\sigma_{21} = 200$ г/м^2;
- правый нижний квадрат: $\sigma_{22} = 120$ г/м^2.

С пластиной связали систему координат Oxy так, что начало отсчёта совпадает с нижним левым углом пластинки (см. рис.). Затем пластину разрезали по двум перпендикулярным прямым, параллельным осям координат, на четыре части **равной массы**.

1. В каком из четырёх квадратов находится точка пересечения линий, по которым разрезали пластину? Обоснуйте свой ответ.

2. Определите координаты точки пересечения линий, по которым разрезали пластину.

3. Чему равны средние поверхностные плотности каждой из четырёх получившихся частей?

8 класс

Задача №1. Из города в деревню

Экспериментатор Баг ехал из города в деревню на автомобиле $t = 10$ ч. Его путь состоял из трех участков, на которых он двигался с постоянными скоростями. Первую часть пути он ехал со скоростью равной средней скорости на всем пути. На втором и третьем участках скорости отличались в 2 раза. Также Баг совершенно точно помнил, что за время пути он дважды (кратковременно) разговаривал по телефону с теоретиком Глюком, причем эти звонки совершенно точно были на разных участках пути и не в момент изменения скорости. В первый раз Глюк позвонил ему через $t_1 = 6{,}5$ ч после выезда из города, когда до деревни оставалось ехать $S_1 = 250$ км, а во второй — через $t_2 = 9$ ч, когда он отъехал от города на $S_2 = 500$ км. Экспериментатор посчитал среднюю скорость на отрезке между двумя звонками Глюка, и оказалось, что она равна скорости на первом участке! Используя данные из условия, определите:

1. Расстояние s, которое проехал Баг между звонками.

2. Скорости движения Бага v_1, v_2 и v_3 на первом, втором и третьем участках, соответственно.

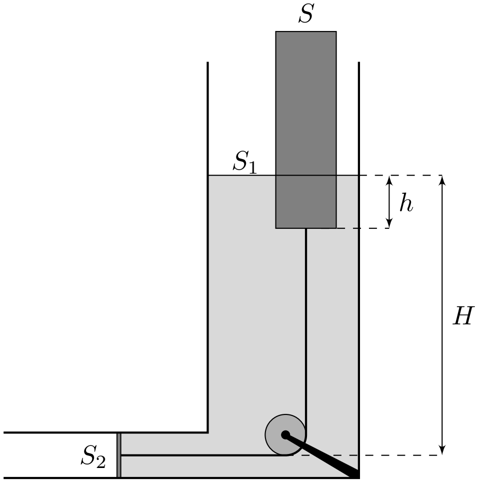
3. Протяженности l_1, l_2 и l_3 в километрах первого, второго и третьего участков, соответственно.

Задача №2. Сосуд с трубой

К цилиндрическому сосуду с вертикальными стенками, площадь дна которого равна S_1, сбоку прикреплена горизонтальная трубка круглого сечения (см. рис.). По трубке без трения может скользить поршень, который при помощи нити, перекинутой через маленький неподвижный блок, связан с поплавком. Участок нити от поплавка до блока вертикален, а от блока до поршня - горизонтален. Если в этот сосуд медленно налить однородную жидкость плотностью ρ, то система окажется в равновесии в тот момент, когда поплавок будет погружён в жидкость на глубину h, а расстояние от центральной оси поршня до поверхности жидкости будет равно H. Площадь поперечного сечения поплавка S, причём $S > S_2$. Трубка открыта в атмосферу, поршень за пределы трубки не выходит. Массы нити, поршня и блока пренебрежимо малы, нить нерастяжима, трение в блоке отсутствует. Ускорение свободного падения равно g.

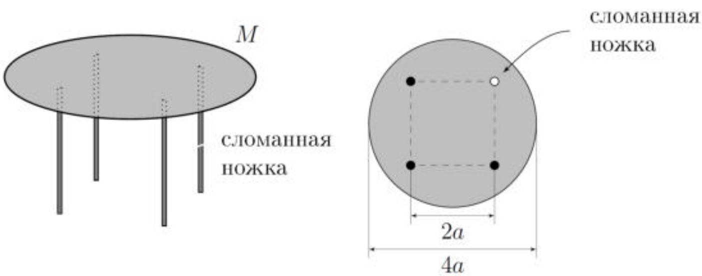
1. Чему равна масса поплавка?

2. На поплавок медленно положили тело массой Δm, в результате чего поршень сместился и занял новое положение равновесия. На какое расстояние и в какую сторону переместился поршень?



Задача №3. Стол и ваза

В гостиной стоит журнальный столик (на рисунках представлен вид стола сбоку (левый рисунок) и сверху (правый рисунок)), столешница которого представляет собой однородный диск радиуса $2a$. Масса столешницы M. Четыре одинаковые вертикальные ножки, масса которых пренебрежимо мала по сравнению с массой столешницы, крепятся к столешнице в вершинах квадрата со стороной $2a$. Центр квадрата, в вершинах которого крепятся ножки, совпадает с центром столешницы. Восьмиклассник случайно сломал одну ножку у журнального столика, ему удалось приделать её обратно, но при любой нагрузке на неё, она снова отламывается от столешницы. Пришедшая домой мама принесла большой букет и попросила его поставить вазу с букетом на этот стол. Масса вазы с букетом равна $m = 5M$.

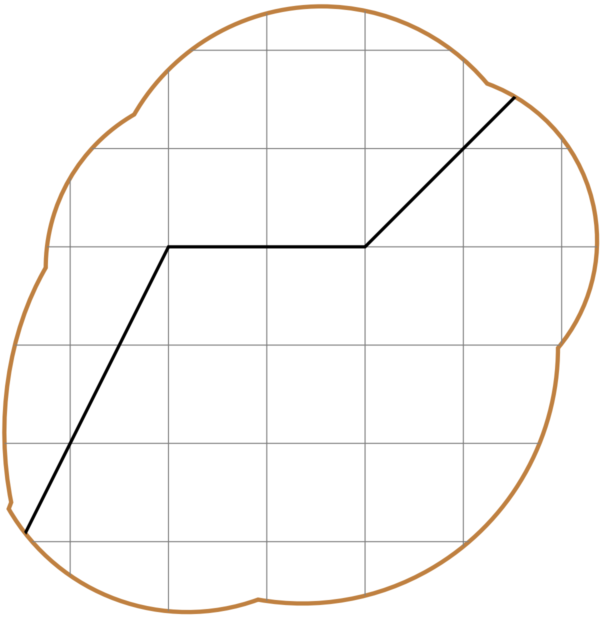


1. Существуют ли точки на столешнице, в которых можно разместить центр основания вазы с букетом так, чтобы столешница была горизонтальна?

2. Если да, то укажите, все возможные их положения.

Задача №4. Потерянный график

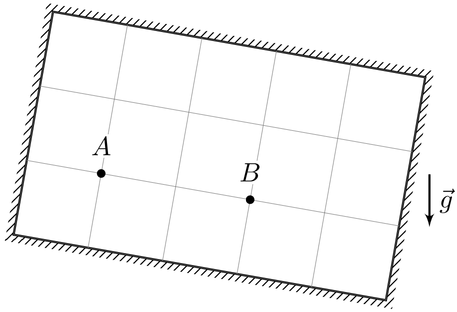
Экспериментатор Глюк решил выпить чай. Он налил воду комнатной температуры $t_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ из графина в чайник и поставил его на газовую плиту постоянной мощности. Наблюдая за тем, как изменяется температура воды со временем, он строил соответствующий график. Через $\Delta\tau = 1$ мин после включения плиты Глюк понял, что воды в чайнике мало, и сразу начал доливать в него из графина еще $V_{\text{дол}} = 0{,}5$ л воды, не снимая чайник с плиты. Пока он медленно доливал эту порцию воды, он видел, что температура воды оставалась постоянной и равной $t_1 = 60\,^\circ\mathrm{C}$. После закипания чайника он случайно опалил огнем края получившегося графика (см. рис.) зависимости температуры воды t от времени τ. Тепловых потерь нет. Теплоемкостью чайника и испарением воды пренебречь. Удельная теплоёмкость воды равна $c = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ °C), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.



1. Перечертите часть графика к себе в решение и восстановите его полную версию, считая, что включение плиты соответствовало времени $\tau_0 = 0$.
2. Какой изначальный объем воды V_0 Глюк налил в чайник?
3. В какой момент времени чайник начал кипеть?
4. Какова была мощность плиты P?

9 класс

Задача №1. Игра в шайбу



В вертикальной плоскости расположена прямоугольная рамка с жёсткими стенками. Точки A и B находятся внутри рамки так, как показано на рисунке: все расстояния до стенок, а также взаимное расположение точек следует принимать согласно масштабу рисунка. Перед началом опыта всю конструкцию (рамку вместе с точками A и B) можно повернуть в пределах одной вертикальной плоскости. После поворота рамки маленькую гладкую шайбу помещают в точку A и отпускают без начальной скорости.

Найдите все возможные ориентации рамки, при которых шайба после одного удара попадёт из точки A в точку B, и для каждой из них определите угол между отрезком AB и ускорением свободного падения.

Отражение шайбы от стенок рамки считайте абсолютно упругим: угол падения равен углу отражения, скорость не изменяется по модулю.

Задача №2. Нелинейная лента

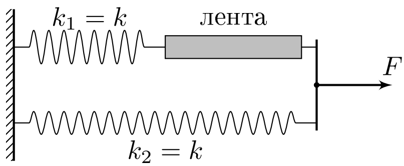


Рис. 1

На рисунке 1 изображена система, состоящая из двух пружин и упругой ленты. Обе пружины с коэффициентом жёсткости $k = 100$ Н/м подчиняются закону Гука. График зависимости силы упругости от удлинения ленты изображён на рисунке 2. В недеформированном состоянии общая длина первой пружины и ленты равна длине второй пружины. К планке на правом конце системы прикладывают внешнюю силу F так, чтобы планка постоянно оставалась параллельной стене.

1. Найдите удлинения пружин Δx_1, Δx_2 и упругой ленты Δx для двух значений внешней силы: $F = 1{,}0$ Н и $F = 20$ Н.

2. С какой максимальной внешней силой $F_{\max}$ можно растягивать систему, если лента рвётся при удлинении $\Delta x_{\max} = 25$ см?

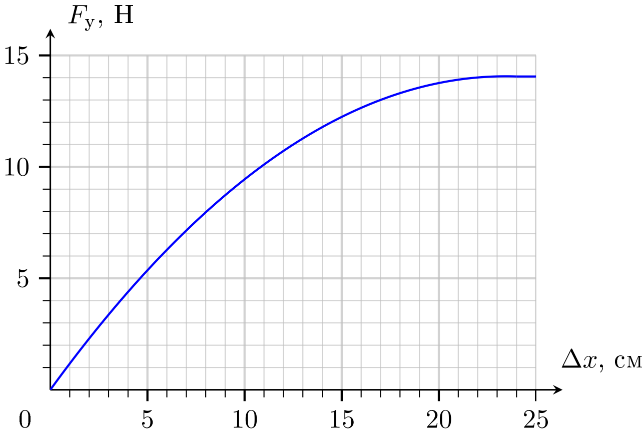
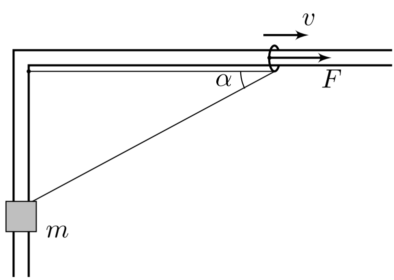


Рис. 2

Задача №3. Тянем-потянем

Гладкий тонкий стержень согнут под прямым углом и зафиксирован в горизонтальной плоскости. По одной его стороне может перемещаться небольшая втулка массой m, по другой — лёгкое маленькое колечко. К вершине прямого угла прикреплён один конец невесомой нерастяжимой нити длиной l. Нить продета через кольцо, и другой конец нити привязан к втулке. α — это угол между направлением от кольца к вершине прямого угла и направлением от кольца к втулке (см. рисунок). Колечко перемещают из вершины прямого угла с постоянной скоростью v. Трение отсутствует. В процессе всего движения нить натянута.

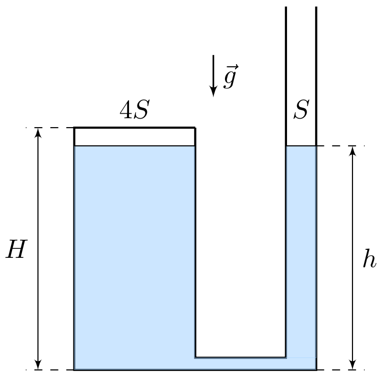


1. Определите скорость движения втулки в начальный момент времени, когда колечко движется вблизи вершины прямого угла.

2. Как зависит скорость движения втулки от угла α?

3. Чтобы колечко двигалось с постоянной скоростью v, к нему прикладывают силу F, направленную вдоль стержня. Как зависит сила F от угла α?

Задача №4. Нагрев жидкости

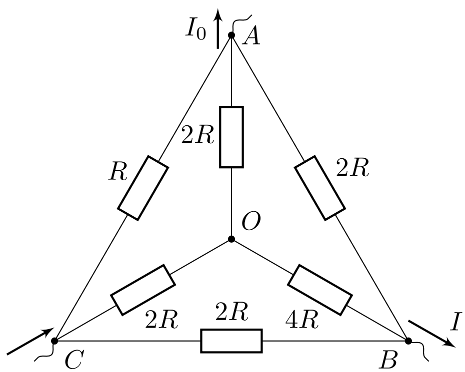


Два вертикальных цилиндрических сосуда соединены внизу тонкой трубкой, обеспечивающей свободное перетекание жидкости. Площади поперечных сечений сосудов равны $4S$ и S (см. рисунок). Сосуд большего сечения имеет высоту H и сверху герметично закрыт горизонтальной жёсткой крышкой, сосуд меньшего сечения значительно выше и открыт сверху. Снаружи вакуум. Сосуды заполняют экспериментальной жидкостью до высоты $h = 0{,}95H$ при температуре t_0. Известно, что при изменении температуры этой жидкости в интервале от t_0 до $2t_0$, её плотность линейно уменьшается с температурой от значения ρ_0 до значения $0{,}5\rho_0$. Температуру жидкости в сосуде большего сечения медленно повышают от t_0 до $2t_0$. После нагрева и установления равновесия в системе найдите:

1. давление жидкости на дне сосудов;
2. давление жидкости на крышку в сосуде большего сечения;
3. температуру жидкости в сосуде меньшего сечения.

Давлением насыщенных паров жидкости, теплоёмкостью сосудов, а также теплообменом с окружающей средой и через трубку, соединяющую сосуды, пренебречь. Ускорение свободного падения равно g. Удельную теплоёмкость жидкости считайте постоянной.

Задача №5. Звезда и треугольник



Фрагмент электрической цепи состоит из шести резисторов, соединённых так, как показано на рисунке. Из узла A всегда вытекает ток постоянной силы I_0. Из узла B вытекает ток силой I, которую можно регулировать как по модулю, так и по направлению (при $I > 0$ его направление совпадает с изображённым). Эту силу тока будем называть регулируемой. Втекающий в третий узел C ток определяется из закона сохранения электрического заряда.

1. Определите изменение силы тока $\Delta I_{\text{верх}}$ через резистор $2R$ между узлами A и O, если регулируемый ток увеличить на ΔI. Ответ выразите через ΔI.

2. Определите изменение силы тока $\Delta I_{\text{нижн}}$ через резистор $2R$ между узлами B и C, если регулируемый ток увеличить на ΔI. Ответ выразите через ΔI.

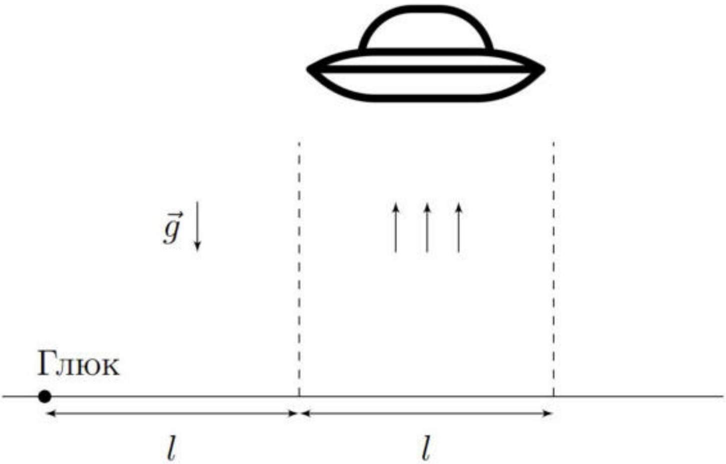
3. При каком значении регулируемой силы тока $I' > 0$ ток в одном из резисторов становится равным нулю? Укажите этот резистор. Ответ выразите через I_0.

4. При каком значении регулируемой силы тока I^* суммарная тепловая мощность, выделяющаяся на резисторах, будет минимальна? Чему равна эта минимальная мощность $P_{\min}$? Ответы выразите через I_0 и R.

10 класс

Задача №1. Опять 45?

В фантастических фильмах иногда показывают, как НЛО захватывает тела на земле с помощью «притягивающего луча» (англ. «tractor beam»). Предположим, он устроен таким образом, что в небольшой вертикальной области пространства на любое произвольное тело массой m со стороны него действует сила $\vec{F}_{\text{tb}} = -2m\vec{g}$, направленная противоположно силе тяжести и вдвое превосходящая её по модулю (сила тяжести действовать, конечно, не перестаёт). Экспериментатору Глюку приснилось, что он оказался на расстоянии l от такой области, ширина которой тоже l (см. рисунок).



1. С какой минимальной скоростью v_{m1} Глюк должен бросить камень с поверхности земли, чтобы он достиг притягивающего луча?

2. С какой минимальной скоростью v_{m2} Глюк должен бросить камень, чтобы он пролетел область, ограниченную лучом, насквозь?

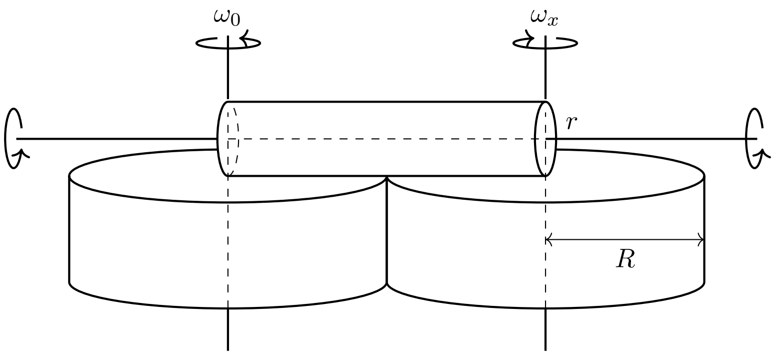
3. Какова максимальная дальность броска L_{m2}, если начальная скорость камня равна $v_0 (v_0 \geqslant v_{m2})$?

4. Найдите максимальную дальность броска L_{m3} в случае $v_0 = v_{m2}$.

Считайте, что камень не отскакивает от земли, а НЛО находится так высоко, что камень ни при каких условиях не может в него попасть. Поверхность земли горизонтальна. Ускорение свободного падения g.

Задача №2. Раскрутка трением

Два одинаковых диска с радиусами R насажены на параллельные вертикальные оси, на которых они могут вращаться без трения. Расстояние между осями чуть больше $2R$, так что между боковыми поверхностями дисков остаётся небольшой зазор. Верхние основания дисков лежат в одной горизонтальной плоскости. Цилиндрический валик радиуса r, длины $2R$ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, плоскость которой лежит в одной плоскости с осями дисков. Сам валик располагается между осями дисков и прижимается к верхним основаниям дисков с одинаковыми силами. Линия касания валика и дисков совпадает с радиусами дисков. Один из дисков вращается с помощью электродвигателя с постоянной угловой скоростью ω_0 и приводит во вращение из-за трения между соприкасающимися поверхностями валик, который в свою очередь раскручивает второй диск.



1. Определите установившуюся скорость вращения ω_x второго диска.

Примечание. При вращении твёрдого тела с постоянной угловой скоростью сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна нулю.

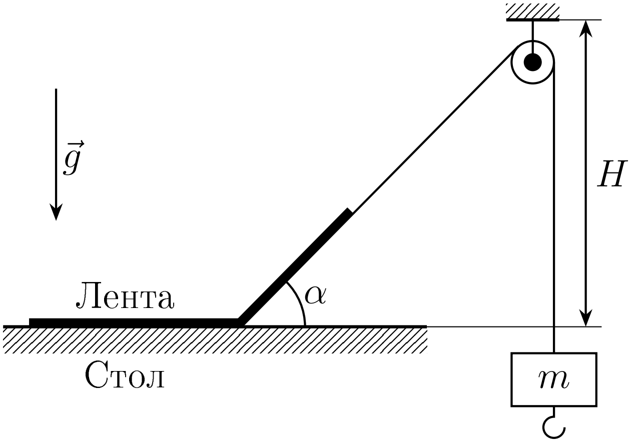
Задача №3. Клейкая лента

Длинная клейкая лента шириной $d = 2$ см приклеена к горизонтальной поверхности стола. Известно, что для того, чтобы оторвать единицу площади такой ленты от стола, нужно совершить работу $\sigma = 10$ Дж/м^2 (считайте, что эта величина не зависит от угла, под которым тянут ленту). Лента является невесомой и нерастяжимой.

1. Под каким углом к горизонту и в каком направлении следует тянуть за конец ленты, чтобы сила, при которой лента начнёт отрываться от стола, была минимальной?

2. Один из концов ленты частично оторвали от стола и прикрепили к нему невесомую нить, переброшенную через маленький (по сравнению с длинами нити

и ленты) невесомый блок, расположенный на высоте $H = 1$ м, как показано на рисунке. При этом угол между нитью и горизонтом составил $\alpha_1 = 45°$. К другому концу нити прикрепили груз. При какой максимальной массе груза m система будет покоиться?

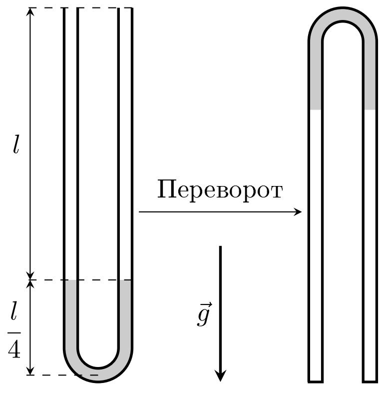


3. К первому грузу с максимально возможной массой m из предыдущего пункта прикрепили второй с неизвестной массой M и отпустили без начальной скорости. Лента стала отрываться, и система пришла в движение. Спустя некоторый промежуток времени грузы остановились, а наклонный участок ленты оказался под углом $\alpha_2 = 30°$ к горизонту. Найдите массу второго груза M, расстояние Δh, на которое в результате сместились грузы, а также модули ускорений грузов в момент начала движения a_1 и в момент остановки a_2.

Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

Задача №4. Трубка со ртутью

В U-образную трубку, расположенную вертикально открытыми концами вверх, залили ртуть, после чего концы трубки запаяли. Радиус закругления внизу трубки и внутренний диаметр трубки много меньше длины прямых участков. Длина столбиков воздуха в исходном положении составляла $l = 625$ мм, длина столбиков ртути справа и слева от места изгиба трубки равнялась $l_2 = l/4$ (см. рисунок). Трубку повернули вокруг горизонтальной оси на 180°. Через некоторое время ртуть заняла устойчивое положение равновесия.



1. На какое расстояние h_0 сместятся концы столбика ртути после переворота, если в конечном состоянии температура не изменится и будет равна T_0?

2. На какое расстояние h_1 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_1 = 0{,}8T_0$?

3. На какое расстояние h_2 сместятся концы столбика ртути, если температуру ртути и воздуха в трубке уменьшить до $T_2 = 0{,}7T_0$?

4. Докажите устойчивость положения равновесия, найденного в п.3.

Капиллярными эффектами и колебаниями столбика ртути можно пренебречь. Ускорение свободного падения равно g. Атмосферное давление во время эксперимента $P_{\text{А}} = 750$ мм.рт.ст.

Задача №5. Термистор

Для измерения температуры используется термистор — элемент, проводимость G которого сильно зависит от его температуры. На графике этой зависимости, представленном на отдельном листе, G_{25} — проводимость термистора при 25 °C. Термистор подключается последовательно к источнику постоянного напряжения и амперметру, показания которого встроенный компьютер переводит в числовое значение температуры, выводимое на экран. Известно, что при номинальном напряжении источника экран показывает **верное** значение **температуры термистора** . Экспериментатор Глюк решил поэкспериментировать с этим прибором в собственной лаборатории. Оказалось, что при реальном значении температуры воздуха 27 °C и поданном на термистор номинальном напряжении экран показывает 29 °C. При ответе на вопросы 1 и 2 считайте, что напряжение на термисторе равно номинальному.

1. При какой температуре воздуха t_1 экран прибора показал бы значение, превышающее t_1 на 1 °C ?

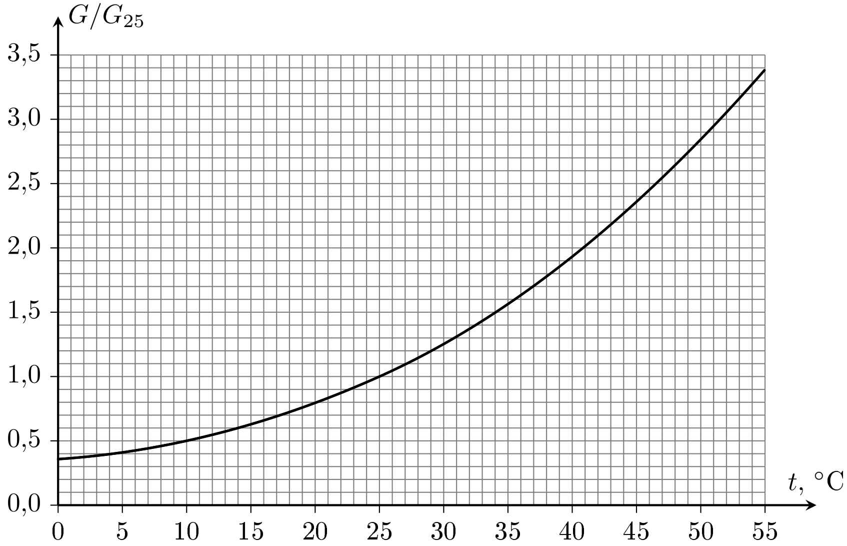
2. Какое значение показал бы экран прибора при температуре воздуха 38,5 °C ?

3. Продолжая эксперименты, Глюк увеличил напряжение источника, сделав его вдвое больше номинального. Какое значение температуры покажет экран в этом случае, если Глюк не менял настройки компьютера, а температура воздуха в лаборатории равна 24 °C ?

Амперметр можно считать идеальным. Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Термистор во всех экспериментах находится в воздухе, не контактируя с другими предметами, а все измерения проводятся в установившемся режиме.

Примечание:

1. Проводимостью элемента электрической цепи называется физическая величина, равная отношению силы тока, текущего через данный элемент, к напряжению на этом элементе.



2. На отдельном листе приведены два одинаковых экземпляра графика зависимости проводимости термистора от его температуры. При сдаче работы этот лист вкладывается в решение участника.

11 класс

Задача №1. По окружности и побыстрее

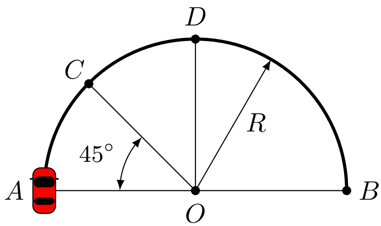
Автомобилист проезжает полуокружность AB радиусом $R = 80$ м так, чтобы, стартовав из положения покоя, добраться до ее конца как можно быстрее. Поверхность дороги горизонтальна, автомобиль — небольшой по размеру, с мощным двигателем и четырьмя ведущими колесами. Общий коэффициент трения всех колес о дорогу можно считать постоянным и равным $\mu = 0{,}5$. Ускорение свободного падения примите равным $g \approx 10$ м/с^2.

1. До какой максимальной скорости может разогнаться автомобиль на этой дороге?

2. Определите скорость автомобиля при прохождении точек C, D и B во время заезда (см. рисунок).

3. Найдите общее время прохождения полуокружности AB.

Указание: считайте известной константой $\beta \equiv \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \approx 1{,}311$.

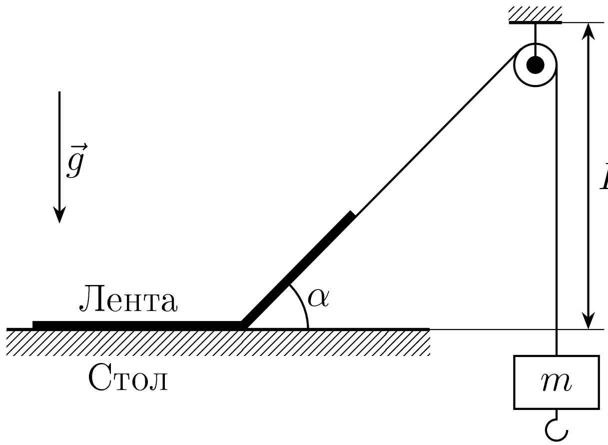


Задача №2. Клейкая лента

Длинная клейкая лента шириной $d = 2$ см приклеена к горизонтальной поверхности стола. Известно, что для того, чтобы оторвать единицу площади такой ленты от стола, нужно совершить работу $\sigma = 10$ Дж/м^2 (считайте, что эта величина не зависит от угла, под которым тянут ленту). Лента является невесомой и нерастяжимой.

1. Под каким углом к горизонту и в каком направлении следует тянуть за конец ленты, чтобы сила, при которой лента начнёт отрываться от стола, была минимальной?

2. Один из концов ленты частично оторвали от стола и прикрепили к нему невесомую нить, переброшенную через маленький (по сравнению с длинами нити и ленты) невесомый блок, расположенный на высоте $H = 1$ м, как показано на рисунке. При этом угол между нитью и горизонтом составил $\alpha_1 = 45°$. К другому концу нити прикрепили груз. При какой максимальной массе груза m система будет покоиться?



3. К первому грузу с максимально возможной массой m из предыдущего пункта прикрепили второй с неизвестной массой M и отпустили без начальной скорости. Лента стала отрываться, и система пришла в движение. Спустя некоторый промежуток времени грузы остановились, а наклонный участок ленты оказался под углом $\alpha_2 = 30^\circ$ к горизонту. Найдите массу второго груза M, расстояние Δh, на которое в результате сместились грузы, а также модули ускорений грузов в момент начала движения a_1 и в момент остановки a_2.

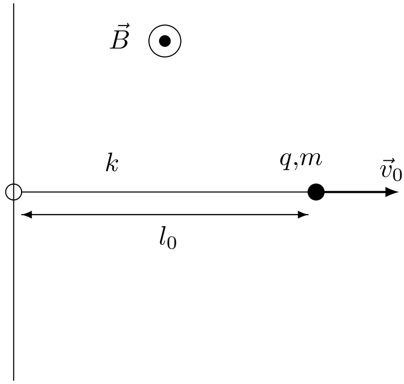
Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

Задача №3. Быстрые поршни

Два одинаковых вертикальных тонкостенных цилиндрических сосуда внутреннего радиуса r, в которых под поршнями находятся равные количества идеального газа, поставили в комнату с температурой воздуха T_0. В одном сосуде газ имеет температуру $T_{\text{Х}} < T_0$, а в другом — температуру $T_{\text{Г}} > T_0$. Поршень и дно цилиндров теплоизолированные. Мощность тепловых потерь через боковые стенки прямо пропорциональна произведению площади контакта и разности температур содержимого сосуда и окружающей среды: $N = \alpha S \Delta T$, где α — некоторая константа. Атмосферное давление p_0, поршни легкие. Молярная теплоемкость газа в сосудах при постоянном давлении C_p. Известно, что максимальные скорости, с которыми двигались поршни каждого из цилиндров вплоть до установления в них комнатной температуры равны по модулю ($v_{\text{Х}}^{\max} = v_{\text{Г}}^{\max}$). Выразите $T_{\text{Г}}$ через T_0 и $T_{\text{Х}}$.

Задача №4. Заряд на резинке

На длинную закреплённую гладкую спицу насажено лёгкое маленькое колечко, к которому прикреплён лёгкий резиновый шнур. В нерастянутом состоянии шнура его длина равна l_0, коэффициент жёсткости равен k. К другому его концу прикреплён точечный положительный заряд q массы m. Система находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости рисунка. В начальный момент времени расстояние от заряда до спицы равно l_0, а его скорость направлена перпендикулярно спице от неё и равна v_0.



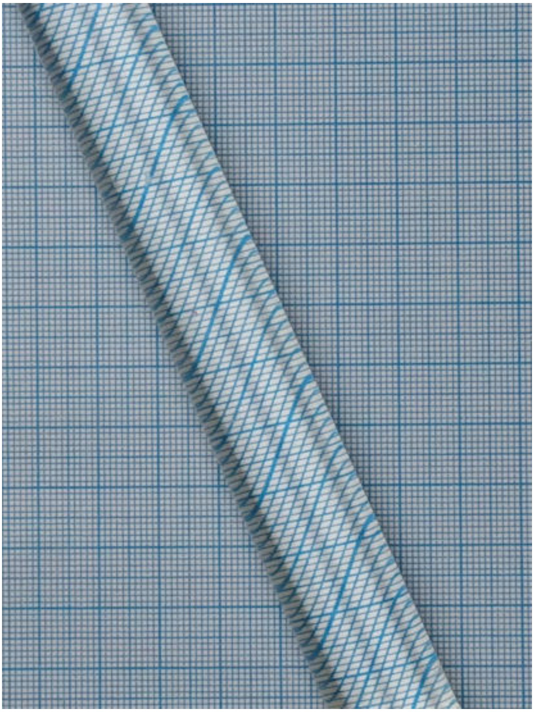
1. Определите траекторию заряда.
2. Определите дрейфовую скорость заряда.

Примечания

- На заряд действуют силы только со стороны шнура и магнитного поля.
- Заданные по условию величины связаны соотношением: $mv_0 < qBl_0$.
- Под дрейфовой скоростью понимается модуль вектора средней скорости за время $T \gg m/qB$.

Задача №5. Цилиндр

У стеклянного цилиндра плоскостью, параллельной его оси, отрезана часть. Цилиндр лежит плоской поверхностью на листе миллиметровой бумаги (см. рис.). Его сфотографировали с большого расстояния камерой, направленной перпендикулярно листу миллиметровки.



1. Определите показатель преломления стекла n.
2. Какая часть радиуса цилиндра отсечена плоскостью?

Примечания

- Для итоговых геометрических построений и получения числовых значений расстояний и углов, необходимых для решения задачи, используйте фотографию, выданную на отдельном листе
- Не забудьте сдать этот лист вместе с остальными

Возможные решения

Задача №7-Т1. Васина ванна

Объемный расход — это объем воды, поступающий в ванну за единицу времени. То есть:

$$\mu = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

За 10 минут ванна набирается на:

$$\left(\frac{1}{2}V - 2\cdot\frac{1}{8}V\right) = \frac{1}{4}V.$$

То есть за 10 минут в ванну поступает 100 л воды. Тогда $\mu = 10$ л/мин.

Из условия задачи не ясно, как взаимно расположены дом, школа и почта. Однако можно точно сказать, что расстояние от школы до почты больше, чем от школы до дома (пока Вася шел от школы до дома ванна набралась на $V/8$, а пока он шел от школы до почты — на $V/4$). Поэтому почта не может находиться между школой и домом. Далее рассматриваем 2 варианта расположения:

1. Школа — Дом — Почта
2. Почта — Школа — Дом

В первом случае за время движения Васи от почты до дома (он пройдет путь от школы до почты за вычетом пути от школы до дома) ванна наберется на:

$$\frac{3}{4}V + \left(\frac{1}{4}V - \frac{1}{8}V\right) = \frac{7}{8}V.$$

То есть лужи на полу не будет, а по условию задачи она должна быть. Значит это не наш случай.

Во втором случае Вася, двигаясь от почты до дома, сначала пройдет путь от почты до школы, а потом от школы до дома. Тогда к его приходу из крана выльется вода в объеме:

$$\frac{3}{4}V + \left(\frac{1}{4}V + \frac{1}{8}V\right) = \frac{9}{8}V.$$

То есть $V/8 = 50$ л окажется на полу.

К моменту выхода Васи из дома ванна была заполнена на

$$\left(\frac{1}{2}V - \frac{1}{8}V\right) = \frac{3}{8}V.$$

Значит все его путешествие из дома и обратно длилось

$$t_1 = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{6V}{8}\mu = 30 \text{ мин}.$$

Чтобы избежать переполнения ванны, Вася должен вернуться не позднее, чем через

$$t_2 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{5V}{8}\mu = 25 \text{ мин.}$$

Значит ему надо двигаться быстрее в $t_1/t_2 = 1{,}2$ раза.

Задача №7-Т2. Тренировка

Максимальное расстояние между спортсменами — диаметр беговой дорожки d. По графику определяем, что диаметр дорожки $d = 100$ м. Тогда длина беговой дорожки равна $\pi d \approx 314$ м. По графику определяем, что спортсмены оказываются в одном месте каждые 350 секунд. Это значит, что за 350 секунд один из спортсменов обгоняет второго на круг. Разность скоростей спортсменов

$$v_1 - v_2 = \frac{314 \text{ м}}{350 \text{ с}} = 0{,}9 \text{ м/с}.$$

За время тренировки τ первый спортсмен пробежал больше второго на $(v_1 - v_2)\tau = 2160$ м. Отсюда выражаем время тренировки

$$\tau = \frac{2160 \text{ м}}{0{,}9 \text{ м/с}} = 2400 \text{ с}.$$

Таким образом, скорость первого бегуна

$$v_1 = \frac{S_1}{\tau} = \frac{12000 \text{ м}}{2400 \text{ с}} = 5 \text{ м/с}.$$

Скорость второго бегуна

$$v_2 = \frac{S_2}{\tau} = \frac{9840 \text{ м}}{2400 \text{ с}} = 4{,}1 \text{ м/с}.$$

Задача №7-Т3. Четыре пристани

Лодка по направлению к A движется против течения реки, а после разворота — по течению. Поэтому:

$$S_{AB} = (v - u)\tau,$$

$$2S_{AB} = (v + u)\tau.$$

Откуда $u = v/3$, $S_{AB} = 2v\tau/3$.

Поскольку лодка против течения и по течению плыла одинаковое время, в СО реки она вернулась к месту старта. Но в таком случае получается, что и катер тоже в СО реки вернулся к месту старта, то есть так же плыл одинаковое время по течению реки и против него. Значит:

$$S_{AB} + S_{CD} = (2v + u)\tau,$$

$$S_{CD} = (2v - u)\tau.$$

Откуда $S_{CD} = 5v\tau/3$.

После первой встречи лодка будет плыть до D в течение времени

$$t_1 = \frac{S_{CD}}{v+u} = \frac{5v\tau/3}{4v/3} = \frac{5}{4}\tau.$$

А катер будет плыть до A в течение времени

$$t_2 = \frac{2S_{AB}}{2v-u} = \frac{4v\tau/3}{5v/3} = \frac{4}{5}\tau.$$

Видно, что катер развернется раньше на $t_2 - t_1 = 9\tau/20$. За это время он успеет проплыть в направлении пристани D путь $S_к = (2v+u)9\tau/20 = 21v\tau/20$.

Тогда от момента поворота лодки в D до второй встречи с катером пройдет время:

$$t_3 = \frac{2S_{AB} + S_{CD} - S_к}{3v} = \frac{13}{20}\tau.$$

Значит:

$$T = t_1 + t_3 = \frac{5}{4}\tau + \frac{13}{20}\tau = \frac{19}{10}\tau = 1{,}9\tau.$$

Задача №7-Т4. Пластина

Вычислим массы каждого квадрата.

- $m_{11} = \sigma_{11}a^2 = 400$ г
- $m_{12} = \sigma_{12}a^2 = 240$ г
- $m_{21} = \sigma_{21}a^2 = 200$ г
- $m_{22} = \sigma_{22}a^2 = 120$ г

Общая масса пластины тогда равна $m_0 = m_{11} + m_{12} + m_{21} + m_{22} = 960$ г.

Так как массы четырех частей после разрезания оказались одинаковыми, то масса каждой получившейся части $m = m_0/4 = 240$ г.

Масса двух левых квадратов до разрезания больше, чем $2m$, значит вертикальный разрез должен пройти по ним. Аналогично, масса двух верхних квадратов до разрезания больше, чем $2m$, значит горизонтальный разрез должен пройти по ним. Поэтому точка пересечения линий разреза находится внутри верхнего левого квадрата.

Пусть горизонтальная координата точки пересечения линий разреза — x, а вертикальная — y. Суммарная масса двух левых частей после разрезания:

$$M_{11} + M_{21} = 2m = \sigma_{11}xa + \sigma_{21}xa.$$

Откуда

$$x = \frac{2m}{a(\sigma_{11} + \sigma_{21})} = 0{,}8 \text{ м}.$$

Суммарная масса двух верхних частей после разрезания:

$$M_{11} + M_{12} = 2m = \sigma_{11}(2a - y)a + \sigma_{12}(2a - y)a$$

.

Откуда

$$y = \frac{2a^2(\sigma_{11} + \sigma_{12}) - 2m}{a(\sigma_{11} + \sigma_{12})} = 1{,}25 \text{ м}.$$

Найдем средние поверхностные плотности получившихся частей.
Левая верхняя часть:

$$\sigma_{11\text{н}} = \frac{m}{x(2a - y)} = 400 \text{ г/м}^2.$$

Правая верхняя часть:

$$\sigma_{12\text{н}} = \frac{m}{(2a - x)(2a - y)} = 267 \text{ г/м}^2.$$

Левая нижняя часть:

$$\sigma_{21\text{н}} = \frac{m}{xy} = 240 \text{ г/м}^2.$$

Правая нижняя часть:

$$\sigma_{22\text{н}} = \frac{m}{(2a - x)y} = 160 \text{ г/м}^2.$$

Задача №8-Т1. Из города в деревню

Воспользуемся тем, что средняя скорость движения $v_{\text{ср}}$ на всем пути равна скорости движения на отрезке между звонками Глюка. Весь путь можно определить, как $S_1 + S_2 - s$, а условие равенства средних скоростей можно будет записать так:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_1 + S_2 - s}{t} = \frac{s}{t_2 - t_1}.$$

Откуда находим, что $s = 150$ км.
Средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = v_1 = \frac{s}{t_2 - t_1} = \frac{150 \text{ км}}{2{,}5 \text{ ч}} = 60 \text{ км/ч}.$$

Также теперь легко определить, что весь путь из города в деревню составил $L = 600$ км.

Ответы на второй вопрос задачи можно получить аналитически и графически.

Аналитическое решение. Рассмотрим все три возможных варианта:

1. Первый звонок был совершён на первом участке, второй — на втором.
2. Первый звонок был совершён на первом участке, второй — на третьем.
3. Первый звонок был совершён на втором участке, второй — на третьем.

При реализации первых двух вариантов первых звонок должен быть совершён на расстоянии $L - S_1 = 350$ км от города. Однако, при этом скорость на первом участке составит $\tilde{v_1} = (L - S_1)/t_1 \approx 54$ км/ч $\neq v_1$, что противоречит ранее найденному v_1. Тогда возможен только третий вариант, при котором первый звонок был совершён на втором участке пути, а второй — на третьем. Тогда скорость Бага на третьем участке: $v_3 = \frac{L-S_2}{t-t_2} = 100$ км/ч. Скорость на втором участке не может быть в 2 раза больше v_3, ведь тогда средняя скорость на всем пути точно будет превосходить 60 км/ч. Значит v_2 в два раза меньше v_3 и $v_2 = 50$ км/ч. Или альтернативно, поскольку средняя скорость движения Бага до первого звонка меньше средней скорости на всём пути, то скорость на втором участке должна быть меньше средней скорости. Тогда скорость на третьем участке вдвое превосходит скорость на втором участке: $v_3 = 2v_2$. В противном случае, средняя скорость на всём пути точно будет меньше 60 км/ч.

Графическое решение. Построим график (см. рис. 1) зависимости пути, который проехал автомобиль, от времени. В момент времени $t = 10$ ч автомобиль проехал $L = 600$ км. Обозначим точку 3, соответствующую этому состоянию. Проведем прямую из начала координат в точку 3. Эта прямая соответствует движению со средней скоростью. И, очевидно, ее часть совпадает с графиком на первом участке. В момент времени $t_1 = 6{,}5$ ч автомобиль проехал $L - S_1 = 350$ км. Обозначим точку 4, соответствующую этому состоянию. В момент времени $t_2 = 9$ ч автомобиль проехал $L - S_2 = 500$ км. Обозначим точку 5, соответствующую этому состоянию. График третьего участка — это часть прямой, проходящей через точки 3 и 5. Проведем ее. По наклону прямой можно определить скорость на третьем участке — $v_3 = \frac{150}{1{,}5} = 100$ км/ч. Заметим, что v_3 больше средней скорости, тогда скорость автомобиля на втором участке $v_2 = \frac{v_3}{2} = 50$ км/ч. Поскольку в обратном случае, если $v_2 = 2v_3 = 200$ км/ч, средняя скорость на всём пути будет превышать $v_{\text{ср}} = 60$ км/ч, что противоречит условию.

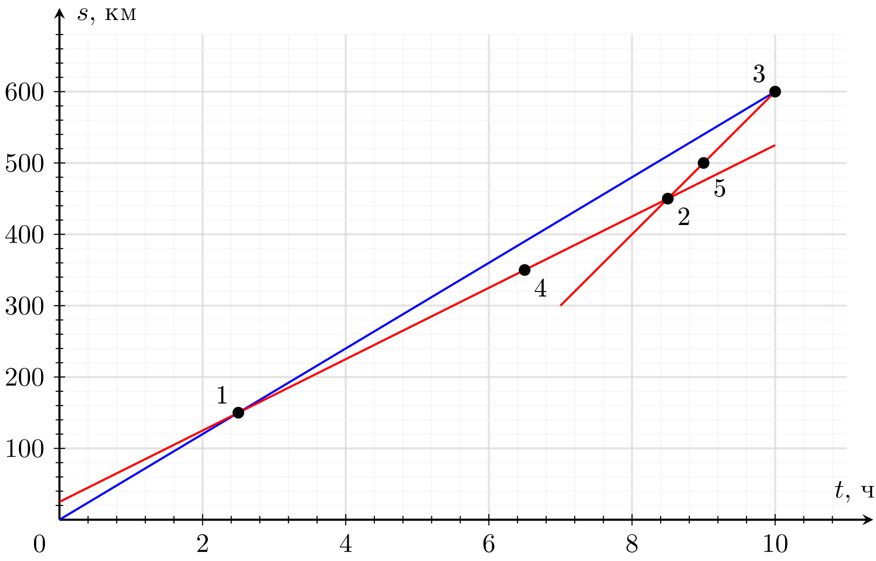


Рис. 1

Ответы на третий вопрос задачи можно получить аналитически и графически.

Аналитическое решение. Пусть T_1 — время движения Бага на первом участке. С учётом того, что расстояние $L - S_1 = 350$ км Баг проехал, двигаясь в течение времени T_1 со скоростью v_1 и времени $t - T_1$ со скоростью v_2, запишем:

$$L - S_1 = v_1 T_1 + v_2(t_1 - T_1).$$

Откуда получим, что

$$T_1 = \frac{L - S_1 - v_2 t_1}{v_1 - v_2} = \frac{600 - 250 - 50 \cdot 6{,}5}{60 - 50} = 2{,}5 \text{ ч}.$$

При этом протяженность первого участка составит $l_1 = v_1 T_1 = 150$ км. Пусть T_2 — время движения Бага на втором участке, тогда $t - T_1 - T_2$ — время движения Бага на третьем участке. Для всего пути можно записать:

$$L = v_1 T_1 + v_2 T_2 + v_3(t - T_1 - T_2).$$

Откуда получим

$$T_2 = \frac{v_1 T_1 + v_3 t - v_3 T_1 - L}{v_3 - v_2} = 6 \text{ ч}.$$

При этом протяженность второго участка составит $l_2 = v_2 T_2 = 300$ км. Тогда протяженность третьего участка составит $l_3 = L - l_1 - l_2 = 150$ км.

Графическое решение. График второго участка — это часть прямой, проходящей через точку 4. Наклон этой прямой соответствует скорости v_2. Эта прямая пересекается с прямой, проведённой через точки 3 и 5, в точке 2, соответствующей границе второго и третьего участков пути. Прямая, проведённая через начало отсчёта и точку 3, пересекается с прямой, проведённой через точки 2 и 4, в точке 1, соответствующей границе первого и второго участка. Прямая 3-5 описывается уравнением $S = -400 + 100 \cdot t$, прямая 4-2 описывается уравнением $S = 25 + 50 \cdot t$. Решая эту пару уравнений совместно, получим координаты точки 2: (8,5 ч; 450 км). Прямая 0-3 описывается уравнением $S = 60 \cdot t$, прямая 4-2 описывается уравнением $S = 25 + 50 \cdot t$. Решая эту пару уравнений совместно, получим координаты точки 1: (2,5 ч; 150 км). Откуда получим, что Баг ехал первые 2,5 ч со скоростью 60 км/ч, затем 6 ч со скоростью 50 км/ч, и в конце — 1,5 ч со скоростью 100 км/ч. Откуда $l_1 = 150$ км (участок 1-2 на рис. 1), $l_2 = 300$ км (участок 2-3 на рис. 1), $l_3 = 150$ км (участок 2-3 на рис. 1).

Задача №8-Т2. Сосуд с трубой

Определим массу поплавка m. Запишем условие равновесия поплавка:

$$mg + T = \rho g h S, \qquad (1)$$

где T — сила натяжения нити, $\rho g h S$ — сила Архимеда, действующая на поплавок.

Запишем условие равновесия поршня:

$$T = \rho g H S_2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) определим массу поплавка:

$$m = \rho(hS - HS_2). \qquad (3)$$

Поместим на поплавок тело массой Δm. Пусть поршень сдвинулся влево на расстояние Δx, а уровень жидкости в вертикальном сосуде увеличился на ΔH. Поскольку нить, связывающая поршень и поплавок, нерастяжима, то при смещении поршня влево на Δx поплавок опустится на Δx.

Сделаем рисунок сосуда с трубкой в начальной ситуации (рис. 2а) и после перемещения поршня (рис. 2б). Объем жидкости на рис. 2а, выделенный светло-серым цветом, равен объёму жидкости, выделенной светло-серым цветом, на рис. 2б.

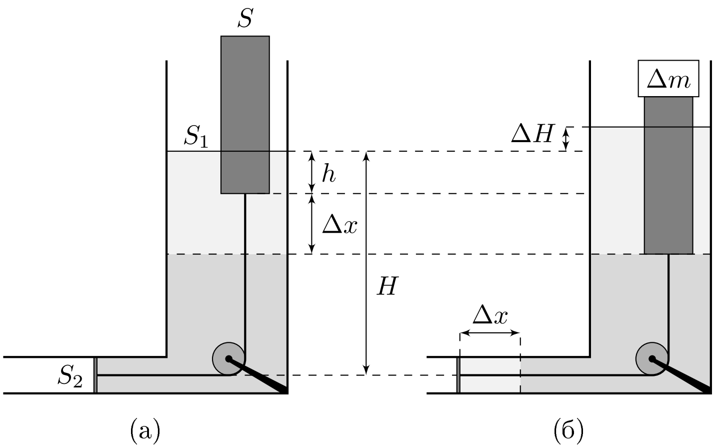


Рис. 2

Запишем условие неизменности объёма жидкости:

$$h(S_1 - S) + \Delta x \cdot S_1 = S_2 \cdot \Delta x + (\Delta x + h + \Delta H) \cdot (S_1 - S).$$

Из записанного соотношения получим связь ΔH и Δx:

$$\Delta H = \frac{\Delta x \cdot (S - S_2)}{(S_1 - S)}. \tag{4}$$

По условию задачи $S > S_2$, следовательно, наше предположение об увеличении высоты уровня жидкости в вертикальном сосуде верно и о том, что поршень смещается влево, верно.

Рассмотрим, как изменились силы, действующие на поплавок. Новая сила Архимеда, действующая на поплавок:

$$F_{\text{Арх}} = \rho g S(h + \Delta H + \Delta x). \tag{5}$$

Обозначим изменившуюся силу натяжения сила T', тогда условие равновесия для поплавка будет выглядеть следующим образом:

$$(m + \Delta m)g + T' = F_{\text{Арх}}. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим новое условие равновесия поршня:

$$T' = \rho g(H + \Delta H)S_2. \tag{7}$$

Из уравнений (5), (6) и (7) с учетом (3) получим

$$\frac{\Delta m}{\rho S} = \Delta x + \Delta H \frac{(S - S_2)}{S}.$$

В последнее уравнение подставим (4) и выразим смещение поршня:

$$\Delta x = \frac{\Delta m}{\rho} \frac{(S_1 - S)}{(S_1 S - 2SS_2 + S_2^2)}.$$

Поршень смещается влево на величину:

$$\Delta x = \frac{\Delta m}{\rho} \frac{(S_1 - S)}{(S_1 S - 2SS_2 + S_2^2)}.$$

Задача №8-Т3. Стол и ваза

Разместим вазу на столе и расставим силы, действующие на систему «столешница + ваза». Сила тяжести столешницы Mg приложена к центру столешницы, сила тяжести вазы mg приложена в точке расположения вазы. Эти силы направлены вертикально вниз. Три силы реакции ножек N_1, N_2 и N_3 направлены вертикально вверх. Сила реакции четвертой ножки должна быть равна нулю.

Способ 1.

Сделаем рисунок столешницы с видом сверху и введем систему координат XOY, начало координат поместим в центр столешницы (см. рис. 3). Координаты точки, в которой находится ваза, обозначим x и y. На рисунке силы реакции ножек направлены перпендикулярно плоскости чертежа, на читателя, и обозначены черными кружками, а силы тяжести направлены перпендикулярно плоскости чертежа, от читателя и обозначены крестиками.

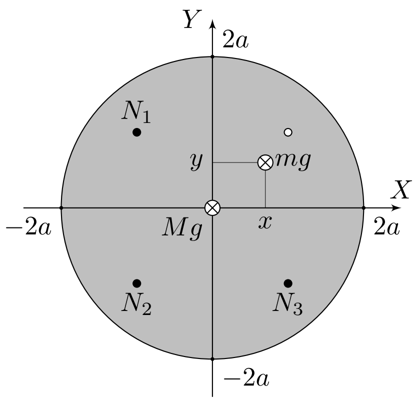


Рис. 3

Запишем условие равновесия системы:

$$(M + m)g = N_1 + N_2 + N_3, \tag{1}$$

правило моментов для оси OX:

$$N_1 a = mgy + N_2 a + N_3 a, \tag{2}$$

и правило моментов для оси OY:

$$N_3 a = mgx + N_1 a + N_2 a. \tag{3}$$

Подставим (2) в (3) и найдем N_2:

$$N_2 = -\frac{mg}{2a}(x+y).$$

Чтобы столешница не переворачивалась, должно выполняться условие $N_2 \geq 0$, а для этого должно выполняться условие $y + x \leq 0$ или

$$y \leq -x. \tag{4}$$

Из уравнения (3) выразим N_3:

$$N_3 = mg\frac{x}{a} + N_1 + N_2.$$

Подставим N_3 и N_2 в (1) и определим N_1:

$$N_1 = \frac{M+m}{2}g + \frac{mg}{2a}y.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, должно выполняться условие

$$N_1 \geq 0,$$

следовательно, должно выполняться

$$\frac{M+m}{2}g + \frac{mg}{2a}y \geq 0.$$

Для выполнения этого условия нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$y \geq -\left(1 + \frac{M}{m}\right)a. \tag{5}$$

Определим N_3

$$N_3 = \frac{M+m}{2}g + \frac{mg}{2a}x.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, должно выполняться условие

$$N_3 \geq 0,$$

следовательно, должно выполняться

$$\frac{M+m}{2}g + \frac{mg}{2a}x \geq 0.$$

Для выполнения этого условия нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$x \geq -\left(1 + \frac{M}{m}\right) a. \tag{6}$$

Подставим $m = 5M$ и запишем все полученные условия и изобразим на поверхности столешницы область, в которой одновременно выполняются все три неравенства

$$y \leq -x; \tag{7}$$

$$y \geq -\left(1 + \frac{M}{m}\right) a = -\frac{6}{5}a; \tag{8}$$

$$x \geq -\left(1 + \frac{M}{m}\right) a = -\frac{6}{5}a. \tag{9}$$

Способ 2.

Сделаем рисунок столешницы с видом сверху и введем систему координат $X'O'Y'$, начало координат поместим в точку, где находится вторая ножка (см. рис. 4). Координаты точки, в которой находится ваза, обозначим x' и y'.

Запишем условие равновесия системы

$$(M + m)g = N_1 + N_2 + N_3, \tag{1'}$$

правило моментов для оси $O'X'$

$$N_1 \cdot 2a = mgy' + Mga, \tag{2'}$$

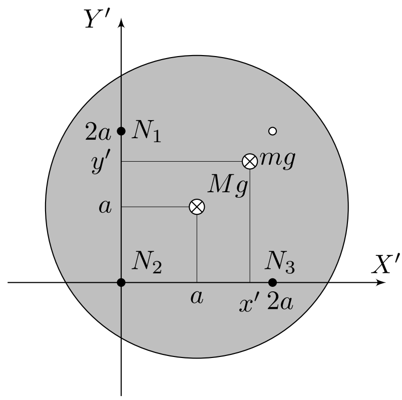


Рис. 4

и правило моментов для оси $O'Y'$

$$N_3 \cdot 2a = mgx' + Mga. \tag{3'}$$

Из уравнения ($2'$) определим силу реакции первой ножки

$$N_1 = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{2a}y'.$$

Чтобы столешница не переворачивалась, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$N_1 \geq 0,$$

откуда получаем область допустимых значений для y'

$$y' \geq -\frac{M}{m}a; y' \geq -\frac{a}{5}. \tag{4'}$$

Из уравнения $(3')$ определим силу реакции Чтобы столешница не переворачивалась, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$N_3 \geq 0,$$

откуда получаем область допустимых значений для x'

$$x' \geq -\frac{M}{m}a; x' \geq -\frac{a}{5}. \tag{5'}$$

Из уравнения (1) определим силу реакции второй ножки

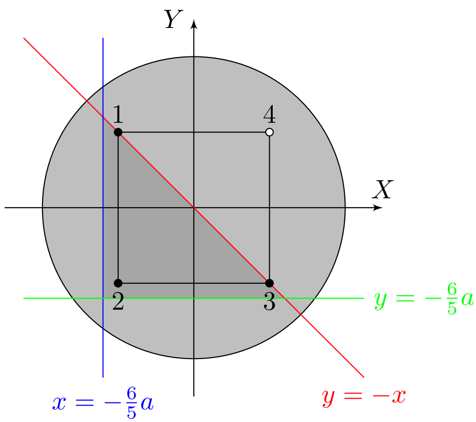
$$N_2 = Mg + mg - N_1 - N_3 = mg\left(1 - \frac{x'}{2a} - \frac{y'}{2a}\right).$$

Условие неотрицательности силы реакции второй ножки даёт неравенство

$$y' \leq 2a - x'. \tag{6'}$$

Геометрическое место точек, которые удовлетворяют неравенствам $(4')$, $(5')$ и $(6')$ находится в той же области на поверхности стола, что найдена в первом варианте.

Область, где возможно размещение вазы, ограничена тремя прямыми, и выделена на рисунке тёмно-серым цветом.



Задача №8-Т4. Потерянный график

Запишем уравнение теплового баланса с учётом подведенного от плиты количества теплоты для первого участка графика:

$$P\tau = c\rho V_0(t - t_0). \tag{1}$$

Следовательно, на первом участке зависимость температуры t от времени τ описывается уравнением прямой:

$$t(\tau) = t_0 + \frac{P}{c\rho V_0}\tau = t_0 + k_1\tau. \tag{2}$$

Способ 1.

На третьем участке уравнение теплового баланса:

$$P\tau = c\rho(V_0 + V_{\text{дол}})(t - t_0). \tag{3}$$

Здесь $V_{\text{дол}}$ — объём долитой воды.

Способ 2.

Рассмотрим тепловые процессы, происходящие на трёх участках по отдельности. Введем обозначения: τ_1 — момент времени, когда начинается долив жидкости, τ_2 — момент времени, когда температура жидкости после доливания начинает увеличиваться. Для первого участка имеем уравнение (1), оно записано выше.

В момент времени τ_1 температура воды в чайнике равна t_1, поэтому

$$P\tau_1 = c\rho V_0(t_1 - t_0). \tag{5}$$

Для второго участка имеем уравнение (нагревается только долитая вода)

$$P(\tau - \tau_1) = c\rho V_{\text{дол}}(t - t_0). \tag{6}$$

В момент времени τ_2

$$P(\tau_2 - \tau_1) = c\rho V_{\text{дол}}(t_1 - t_0). \tag{7}$$

Для третьего участка

$$P(\tau - \tau_2) = c\rho(V_0 + V_{\text{дол}})(t - t_1). \tag{8}$$

Комбинируя уравнения (5), (7) и (8), получим уравнение (3).

Из уравнения (3) следует, что на третьем участке графика зависимость температуры t от времени τ описывается уравнением прямой:

$$t(\tau) = t_0 + \frac{P}{c\rho(V_0 + V_{\text{дол}})}\tau = t_0 + k_3\tau. \tag{4}$$

Графики функций, описываемых уравнениями (2) и (4), имеют общую точку — $(0;\, t_0)$. Поэтому, если графики продолжить до пересечения, то точка пересечения графиков будет лежать на оси температуры. Таким образом, можно восстановить масштаб по оси времени — одна клетка соответствует 0,5 мин. Масштаб по оси температур — одна клетка соответствует 10 °C — восстанавливаем, зная температуры $t_1 = 60\,^\circ\mathrm{C}$ и $t_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Зная масштаб по осям и вид прямых восстанавливаем график на рис. 2.

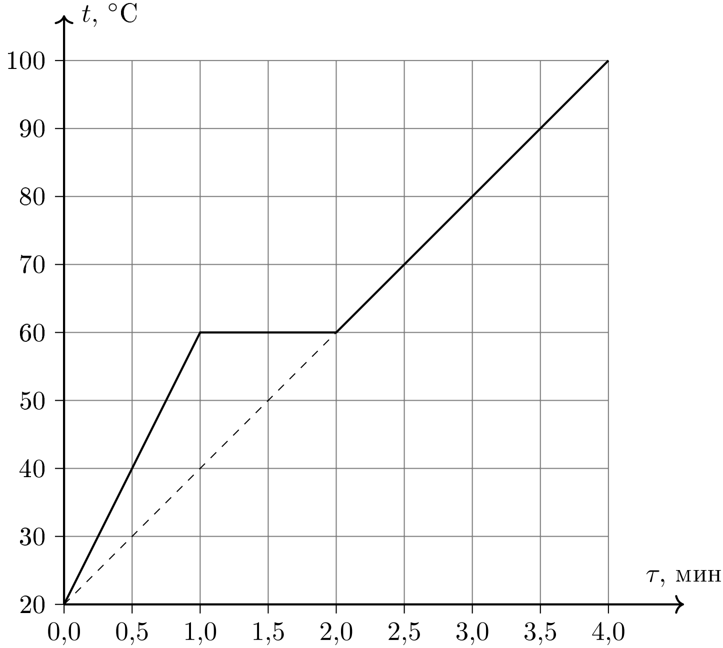


Рис. 2

Уравнения (2) и (4) описывают линейную зависимость температуры от времени с различными угловыми коэффициентами наклона k_1 и k_3, отношение которых равно:

$$\frac{k_1}{k_3} = \frac{V_0 + V_{\text{дол}}}{V_0}. \tag{9}$$

По сохранившейся части графика определяем отношение $\frac{k_1}{k_3} = 2$.

Следовательно, объём долитой воды совпадает с начальным объёмом, поэтому $V_0 = V_{\text{дол}} = 0{,}5$ л.

По графику на рис. 2 определяем, что температура воды станет равной 100 °C через $\tau_2 = 4$ мин после начала нагревания. Тот же результат можно получить, если сначала, используя уравнение теплового баланса для второго участка, определить значение мощности, а затем посчитать время нагревания до температуры $100\,°\mathrm{C}$ на третьем участке.

По условию задачи при доливании воды в течении $\Delta\tau = 1$ мин $= 60$ с температура воды не менялась, поэтому все полученное от нагревателя количество теплоты шло на нагревание добавленной воды от температуры $t_0 = 20\,°\mathrm{C}$ до температуры $t_1 = 60\,°\mathrm{C}$, поэтому:

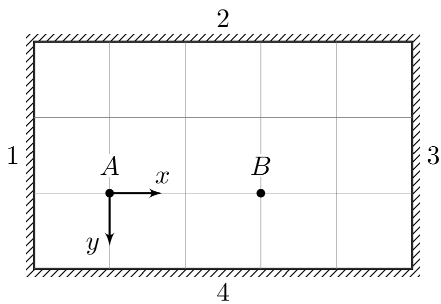
$$P \cdot \Delta\tau = c\rho V_{\text{дол}}(t_1 - t_0). \tag{10}$$

Из записанного выражения определим мощность

$$P = \frac{c\rho V_{\text{дол}}}{\Delta\tau}(t_1 - t_0) = 1400 \text{ Вт}.$$

Задача №9-Т1. Игра в шайбу

Пронумеруем стороны рамки и введём координаты x, y с началом в точке A, направив их вдоль и перпендикулярно отрезку AB.



Пусть координаты точки A равны $(0;0)$, координаты точки B равны $(L;0)$, а расстояние от точек до стороны — H. Будем искать проекции ускорения свободного падения g_x и g_y.

Рассмотрим движение шайбы из A в B с отскоком от стороны 4. Из уравнения движения по оси y получим, что время падения из точки A до стенки равно $\sqrt{2H/g_y}$. После удара шайба будет лететь столько же по времени до точки B.

Полное время составит:

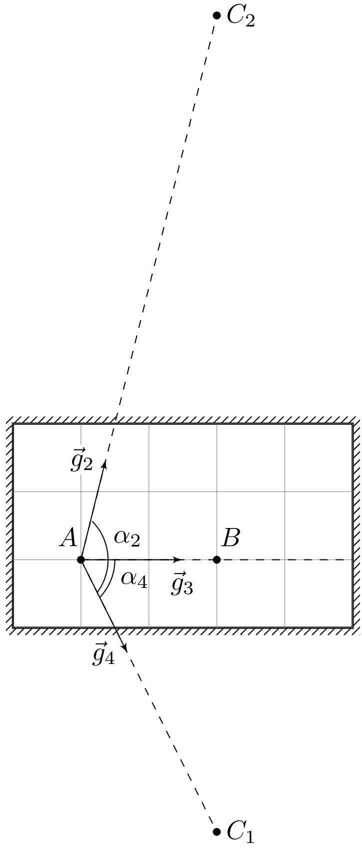
$$t = 2\sqrt{\frac{2H}{g_y}}.$$

По оси x шайба двигается равноускоренно, так как при упругом ударе проекция скорости на ось x не меняется.

$$L = g_x \frac{t^2}{2} = g_x \cdot \frac{4H}{g_y}.$$

Откуда получим:

$$\frac{g_x}{g_y} = \frac{L}{4H}.$$



В случае отскока от стенки 4 $L = 2l$ и $H = l$, где l — сторона заданной масштабной сетки. Из полученного отношения проекций ускорений легко найти направление $\vec{g}$. Например, можно отметить точку C_1 с координатами $(2l; 4l)$. Тогда $\vec{g}$ будет направлено вдоль прямой AC_1 и, в частности, первая часть траектории шайбы будет лежать вдоль этой прямой.

Аналогично можно поступить со стороной 2. В этом случае $L = 2l$ и $H = 2l$, тогда ускорение свободного падения будет направлено вдоль отрезка AC_2, где координаты точки C_2 это $(2l; -8l)$.

После отскока от стороны 1 шайба не сможет попасть в точку B, так как та расположена дальше точки A по оси x. По тем же соображениям отражение от стороны 3 подходит. Соответствующее этому случаю направление ускорения свободного падения будет вдоль оси x.

С помощью найденных в предыдущем пункте координат точек C_1 и C_2 вычислим углы между направлением AB и ускорением свободного падения:

$$\alpha_4 = \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ,\ \alpha_2 = \operatorname{arctg} 4 \approx 76^\circ,\ \alpha_3 = 0^\circ.$$

Задача №9-Т2. Нелинейная лента

Пусть F_1 — сила упругости ленты и первой пружины, а F_2 — сила упругости второй пружины.

Сила F, с которой растягивают данную систему, уравновешивается данными силами F_1 и F_2:

$$F = F_1 + F_2.$$

Закон Гука для пружин: $F_1 = k\Delta x_1$ и $F_2 = k\Delta x_2$.

Суммарное удлинение первой пружины и ленты равно удлинению второй пружины:

$$\Delta x_1 + \Delta x = \Delta x_2.$$

Из этих уравнений получим:

$$\Delta x = \Delta x(F_1) = \frac{F}{k} - \frac{2}{k}F_1, \tag{1}$$

или

$$F_1(\Delta x) = \frac{F}{2} - \frac{k}{2}\Delta x. \tag{1'}$$

При $F_1 < 1$ Н лента ведёт себя как пружина с коэффициентом жёсткости $k_0 \approx 120$ Н/м, который можно определить с помощью коэффициента наклона касательной к начальному участка графика. Следовательно, зависимость удлинения ленты от растягивающей её силы можно выразить как:

$$F_1 = k_0\Delta x. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\Delta x = \frac{F}{k} - \frac{2k_0}{k}\Delta x$$

или

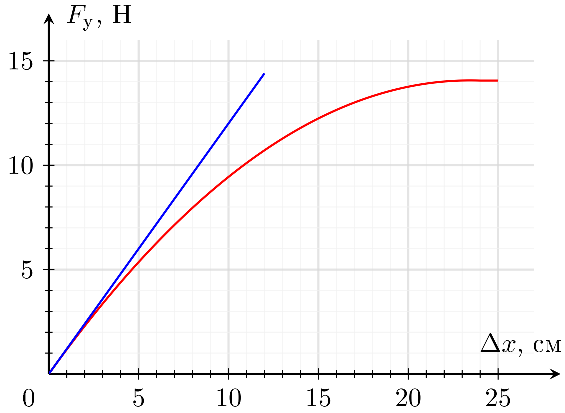
$$\Delta x = \frac{F}{2k_0 + k} \approx 2{,}9 \text{ мм}.$$

Тогда

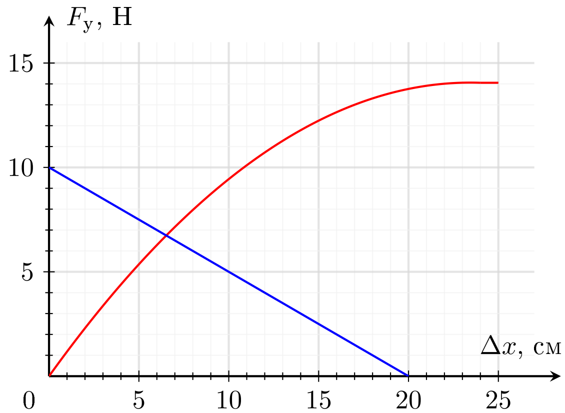
$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k} = \frac{k_0}{k}\Delta x = \frac{k_0 F}{(2k_0 + k)k} \approx 3{,}5 \text{ мм}$$

и

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x \approx 6{,}4 \text{ мм}.$$



Для нахождения растяжений при $F = 20$ Н построим зависимость (1′) (аналог нагрузочной прямой из электричества) на графике из условия.



Пересечение этих прямой и кривой позволяет найти силу упругости ленты $F_1 \approx 6{,}7$ Н и её удлинение

$$\Delta x \approx 6{,}5 \text{ см}.$$

Следовательно, удлинение первой пружины

$$\Delta x_1 = \frac{F_1}{k} \approx 6{,}7 \text{ см}$$

и удлинение второй пружины

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \Delta x \approx 13{,}2 \text{ см}.$$

Угловой коэффициент прямой $(1')$ не зависит от прикладываемой силы.

Проведём прямую с таким угловым коэффициентом через крайнюю точку графика (25 см; 14 Н) либо решим уравнение аналитически, подставив в соответствующие значения

$$F_1 = \frac{F_{\max}}{2} - \frac{k}{2}\Delta x_{\max}.$$

Тогда максимальная сила: $F_{\max} = 53$ Н.

Задача №9-Т3. Тянем-потянем

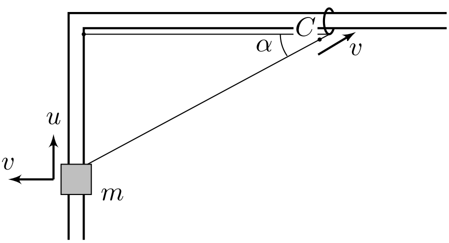
За небольшое время Δt колечко пройдет расстояние $v\Delta t$, оставив позади себя кусочек нити длиной $v\Delta t$. Такой же по длине кусочек нити должен освободиться из-за приближения втулки к колечку. Значит, $u(0)\Delta t = v\Delta t$, и:

$$u(0) = v.$$

Ответ на второй вопрос можно получить разными способами.

Способ 1. Перейдем в систему отсчета, связанную с колечком. В этой СО колечко неподвижно, а у втулки появляется составляющая скорости, перпендикулярная стержню (см. рисунок). При этом относительно точки C, выбранной вблизи колечка, втулка движется по окружности. Проекции скоростей втулки и точки C на направление участка нити между втулкой и кольцом должны компенсировать друг друга так, чтобы длина этого участка оставалась постоянной. Точка C движется со скоростью v, поэтому:

$$v = u\sin\alpha - v\cos\alpha.$$



Способ 2. Пусть расстояния от вершины прямого угла до колечка и до втулки равны соответственно x и y. Тогда запишем полную длину нити следующим образом:

$$x + \sqrt{x^2+y^2} = l.$$

Возьмём производную по времени:

$$\dot{x} + \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dot{l} = 0;$$

$$\dot{y} = -\frac{\dot{x}}{y}(\sqrt{x^2+y^2}+x);$$

$$u = \frac{v}{y}(\sqrt{x^2+y^2}+x).$$

$$u = v\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = v\,\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Способ 3. Рассмотрим маленький промежуток времени Δt. Колечко прошло расстояние $v\Delta t$, а втулка $u\Delta t$. Проецируя эти перемещения на отрезок, соединяющий колечко с ниткой, получим маленькое изменение длины куска нити между ними:

$$\Delta R = v\Delta t\cos\alpha - u\Delta t\sin\alpha.$$

Кусок нити между вершиной прямого угла и колечком увеличился на $v\Delta t$. Так как полная длина нити не меняется:

$$(v\cos\alpha - u\sin\alpha + v)\Delta t = 0.$$

Откуда:

$$u = v\,\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ответ на третий вопрос можно получить разными способами.

Способ 1. Скорость втулки при её движении по окружности относительно точки C равна:

$$v\sin\alpha + u\cos\alpha = v\frac{\sin^2\alpha+\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha} = v\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Нормальная компонента ускорения:

$$a_n = \frac{v^2(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha\cdot R},$$

где $R = \frac{l}{1+\cos\alpha}$ — длина участка нити между втулкой и точкой C. Полное ускорение втулки a направлено вдоль стержня, а a_n является его проекцией на нить. Поэтому

$$a = \frac{a_n}{\sin\alpha} = \frac{v^2(1+\cos\alpha)^3}{\sin^3\alpha\cdot l}.$$

Способ 2. Воспользуемся полученной в предыдущем пункте связью u и v:

$$u = \frac{v}{y}(\sqrt{x^2+y^2}+x) = v\frac{l}{y}.$$

Возьмём производную по времени от этого выражения:

$$a = -vl\frac{\dot{y}}{y^2} = \frac{v^2l^2}{y^3}.$$

Так как нить нерастяжима:

$$l = \frac{y}{\sin\alpha} + \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow y = \frac{l\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Тогда:

$$a = \frac{v^2(1+\cos\alpha)^3}{\sin^3\alpha\cdot l}.$$

Далее $ma = T\sin\alpha$, откуда

$$T = m\frac{v^2(1+\cos\alpha)^3}{\sin^4\alpha\cdot l}.$$

Сила F, прикладываемая к колечку, равна сумме проекций двух сил натяжения на стержень:

$$F = T + T\cos\alpha = m\frac{v^2(1+\cos\alpha)^4}{l\sin^4\alpha}.$$

Задача №9-Т4. Нагрев жидкости

Зависимость плотности от температуры:

$$\rho(t) = \rho_0 - \frac{\rho_0}{2}\cdot\frac{t-t_0}{t_0} = \rho_0\frac{3t_0-t}{2t_0}. \qquad (1)$$

Начальная масса m_{L0} жидкости в левом сосуде:

$$m_{L0} = 4Sh\rho_0 = 4SH\rho.$$

Следовательно сосуд большего сечения заполнится доверху, когда плотность в нём уменьшится до $\rho = 0{,}95\rho_0$. Из (1) получаем:

$$\rho = 0{,}95\rho_0 \Rightarrow 3t_0 - t_1 = 1{,}9t_0 \Rightarrow t_1 = 1{,}1t_0.$$

После этого жидкость начинает перетекать из левого (широкого) сосуда в правый. При достижении температуры $t = 2t_0$ масса m_L жидкости в левом сосуде равна:

$$m_L = 4SH\cdot\frac{\rho_0}{2} = 2\rho_0SH.$$

Полная масса m жидкости изначально:

$$m = (4S+S)h\rho_0 = 5S\cdot 0{,}95H\rho_0 = 4{,}75\rho_0SH.$$

Следовательно, масса m_R жидкости в правом сосуде после нагрева:

$$m_R = m - m_L = 2{,}75\rho_0 SH.$$

Тогда давление на дне:

$$p_{\text{дно}} = \frac{m_R g}{S} = 2{,}75\rho_0 gH.$$

Давление $p_{\text{к}}$ жидкости на крышку в сосуде большего сечения найдём из равенства давлений:

$$p_{\text{к}} = p_{\text{дно}} - 0{,}5\rho_0 gH = 2{,}25\rho_0 gH.$$

Поскольку объём левого сосуда фиксирован (при достижении высоты H), уменьшение массы в нём прямо пропорционально уменьшению плотности при нагреве. При нагреве левого сосуда на малую величину Δt плотность уменьшается на $\Delta\rho$, и в правый сосуд перетекает масса:

$$\Delta m = 4SH\,\Delta\rho, \qquad (2)$$

температура которой равна текущей температуре t в левом сосуде.

Способ 1. Можно считать, что нагреватель сообщил количество теплоты массе Δm уже после того, как она переместилась в правый сосуд. Тогда количество теплоты, поступающее в правый сосуд:

$$\Delta Q = c\Delta m\,(t - t_0) = 4cSH(t - t_0)\Delta\rho,$$

где c — теплоёмкость жидкости.

Если воспользоваться графиком зависимости $\rho(t)$, то можно заметить, что величине ΔQ пропорциональна площадь полоски шириной $\Delta\rho$ и длиной $t - t_0$ (см. рисунок 1), домноженной на $4cSH$.

Полное количество «перенесённой» в правый сосуд теплоты Q пропорционально площади трапеции, показанной на рисунке 2, с домножением на $4cSH$. Тогда:

$$Q = 0{,}99\rho_0 t_0 cSH.$$

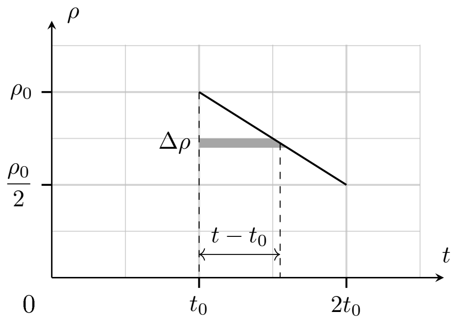


Рис. 1

Эта теплота, распределённая по массе $m_R = 2{,}75\rho_0 SH$, повысит температуру правого сосуда:

$$t_R = t_0 + \frac{Q}{cm_R} = t_0 + \frac{0{,}99\rho_0 t_0 cSH}{c \cdot 2{,}75\rho_0 SH}.$$

Способ 2. Из (1) и (2) получим, что при повышении температуры левого сосуда от $t_1 = 1{,}1t_0$ до $t_2 = 2t_0$ масса, перетекающая в правый сосуд, увеличивается равномерно с температурой:

$$\Delta m = \frac{2SH}{t_0} \cdot \Delta t.$$

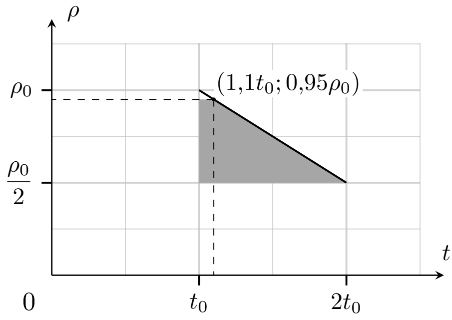


Рис. 2

Следовательно, распределение масс по температуре равномерное, и средняя температура приходящих порций жидкости равна среднему арифметическому концов интервала:

$$t_{\text{ср}} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1{,}1t_0 + 2t_0}{2} = 1{,}55t_0.$$

Уравнение теплового баланса для правого сосуда:

$$m_{R0}c(t_R - t_0) + \Delta mc(t_R - t_{\text{ср}}) = 0,$$

где m_{R0} — начальная масса жидкости в правом сосуде. Отсюда:

$$t_R = \frac{m_{R0}t_0 + \Delta m\, t_{\text{ср}}}{m_{R0} + \Delta m}.$$

Способ 3. Малая масса, перетекающая при возрастании температуры на $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}m = -4SH\,\mathrm{d}\rho.$$

Из (1):

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{\rho_0}{2t_0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}m = \frac{2\rho_0 SH}{t_0}\,\mathrm{d}t.$$

Количество теплоты, переносимое этой массой:

$$\mathrm{d}Q = c(t - t_0)\,\mathrm{d}m \;= c(t - t_0)\frac{2\rho_0 SH}{t_0}\,\mathrm{d}t.$$

Интегрируем от $t_1 = 1{,}1t_0$ до $2t_0$:

$$Q = \frac{2\rho_0 SHc}{t_0}\int\limits_{1{,}1t_0}^{2t_0}(t - t_0)\,\mathrm{d}t = \frac{2\rho_0 SHc}{t_0}\left[\frac{(t - t_0)^2}{2}\right]\Bigg|_{1{,}1t_0}^{2t_0}.$$

Подставляем пределы:

$$Q = \frac{2\rho_0 SHc}{t_0} \cdot \frac{t_0^2 - 0{,}01t_0^2}{2} = 0{,}99\rho_0 c t_0 SH.$$

Далее, как и в первом способе:

$$t_R = t_0 + \frac{Q}{cm_R}.$$

Окончательно:

$$t_R = 1{,}36t_0.$$

Задача №9-Т5. Звезда и треугольник

Способ 1. Воспользуемся методом наложения токов. Представим два независимых источника тока: один создаёт ток силой I_0, другой — регулируемый ток I (см. рисунок 1). При расстановке токов учтём, что часть цепи для каждого источника представляет собой сбалансированный мост.

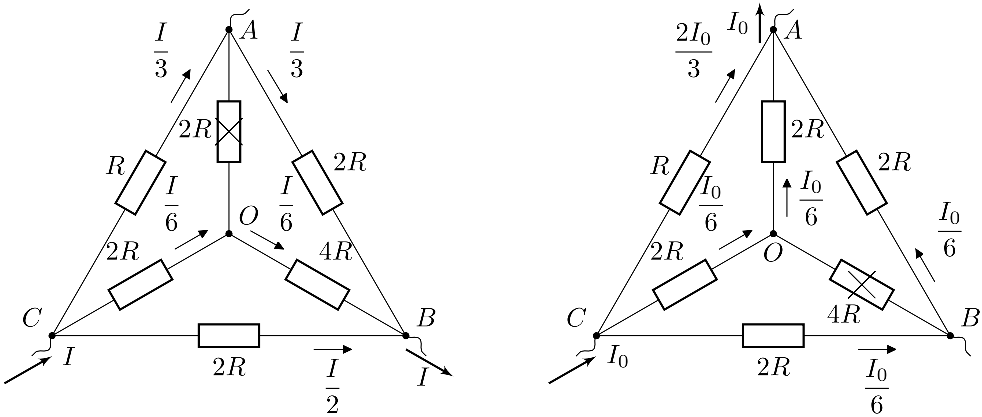


Рис. 1

Способ 2. Введём токи I_1 и I_2, далее, с учётом первого и второго правил Кирхгофа выразим через них токи во всех остальных участках разветвлённой цепи (см. рисунок 2).

Запишем первое правило Кирхгофа для узлов A и B и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2I_2 + 2I_1 + I_1 = I_0 + 2I_2 - 3I_1, \\ 3I_2 - 2I_1 + I_2 - I_1 + 2I_2 - 3I_1 = I. \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = I_0/6, \\ I_2 = (I + I_0)/6. \end{cases}$$

Заметим, что ток I никак не влияет на силу тока через верхний резистор, следовательно:

$$\Delta I_{\text{верх}} = 0.$$

Изменение силы тока через нижний резистор

$$\Delta I_{\text{нижн}} = \Delta\left(\frac{I}{2} + \frac{I_0}{6}\right) = \frac{\Delta I}{2}.$$

Единственный резистор, через который токи от двух источников направлены противоположно, — это резистор $2R$ между узлами A и B. Условие обнуления тока:

$$I'/3 = I_0/6.$$

Таким образом $I' = I_0/2$.

Ответ на четвертый вопрос можно получить разными способами.

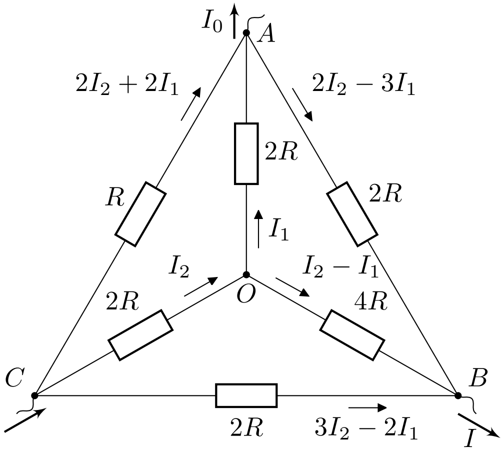


Рис. 2

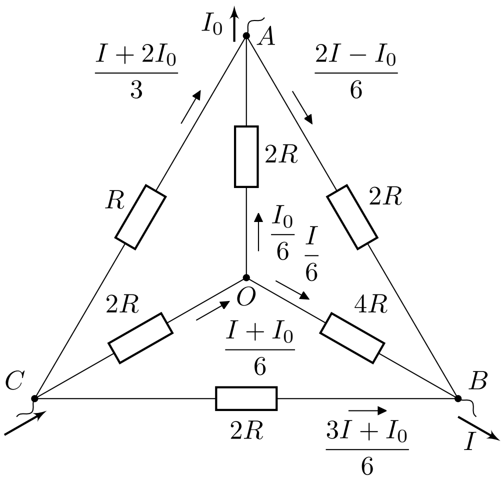


Рис. 3

Способ 1. Мощность можно рассчитать как сумму мощностей воображаемых источников токов I_0 и I. Напряжение между узлами B и C:

$$U_{BC} = (\frac{I}{2} + \frac{I_0}{6}) \cdot 2R,$$

а между узлами A и C:

$$U_{AC} = (\frac{I}{3} + \frac{2I_0}{3}) \cdot R.$$

Тогда суммарная тепловая мощность, выделяющаяся в цепи равна:

$$P(I) = U_{BC}I + U_{AC}I_0 = RI^2 + \frac{2}{3}II_0R + \frac{2}{3}RI_0^2.$$

Способ 2. Тот же результат можно получить как сумму тепловых мощностей на каждом резисторе:

$$P(I) = R\left(\frac{I}{3} + \frac{2I_0}{3}\right)^2 + 2R\left(\frac{I_0}{6}\right)^2 + 2R\left(\frac{I}{6} + \frac{I_0}{6}\right)^2 +$$

$$+4R\left(\frac{I}{6}\right)^2 + 2R\left(\frac{I}{3} - \frac{I_0}{6}\right)^2 + 2R\left(\frac{I}{2} + \frac{I_0}{6}\right)^2.$$

Минимум выражения $P(I)$ (вершина параболы) достигается при:

$$I^* = -\frac{I_0}{3}$$

.

Соответствующая минимальная мощность:

$$P_{\min} = P(I^*) = \frac{5}{9}RI_0^2.$$

Задача №10-Т1. Опять 45?

Пока камень не долетел до притягивающего луча, он движется с постоянным ускорением $\vec{g}$. Дальность полёта камня, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту равна

$$l_0 = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Это выражение принимает максимальное значение при $\alpha = 45°$, следовательно

$$v_{m1} = \sqrt{gl}.$$

Направим ось OX горизонтально, а ось OY — вертикально вверх; в качестве начала отсчёта O выберем положение Глюка. Левую и правую (по ходу полёта камня) границы области, ограниченной притягивающим лучом, пронумеруем 1 и

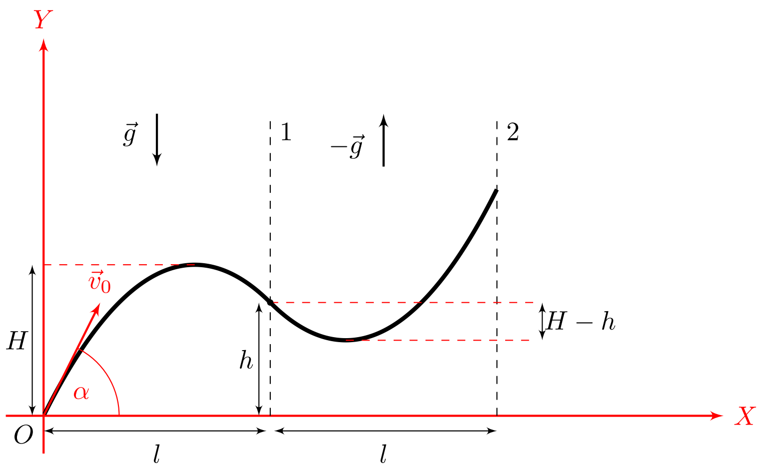
2 соответственно (см. рисунок). Ясно, что внутри луча камень движется с ускорением $-\vec{g}$, и если он пересекает границу 1 так, что проекция его скорости $v_y \geq 0$, то камень достигнет и границы 2. Этому соответствует условие

$$v_0 \sin\alpha - gt_1 \geq 0,$$

где $t_1 = l/(v_0\cos\alpha)$, а α — угол между $\vec{v}_0$ и горизонтом. Следовательно, чтобы пролететь область, ограниченную лучом, насквозь, заведомо достаточно скорости

$$v'_{m2} = \sqrt{\frac{2gl}{\sin 2\alpha}}.$$

Проверим, что $v_{2m} < v'_{m2}$. Характерная для такого случая траектория камня приведена на рисунке. Её участок левее границы 2 обладает центральной симметрией относительно точки пересечения границы 1. Пусть H — наибольшая высота подъёма камня на участке слева от луча, а h — высота, на которой камень пересекает границу 1.



Траектория камня при $v_0 > v_{m1}$ обладает центральной симметрией

Из сказанного выше следует (см. рисунок), что для того, чтобы камень достиг границы 2, достаточно

$$H - h < h \quad \Rightarrow \quad h > H/2.$$

Из закона равноускоренного движения следует, что

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$
$$h = y(l) = \operatorname{tg} \alpha \cdot l - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot l^2.$$

Тогда условие $h > H/2$ может быть приведено к виду

$$\frac{8g^2 l^2}{\sin^2 2\alpha} - \frac{8gl}{\sin 2\alpha} \cdot v_0^2 + v_0^4 < 0.$$

Выделим в этом выражении полный квадрат:

$$\left(\frac{4gl}{\sin 2\alpha} - v_0^2\right)^2 - \frac{8g^2 l^2}{\sin^2 2\alpha} < 0.$$

Откуда выразим v_0^2 (напомним, что нас интересуют значения $v_0^2 < 2gl/\sin 2\alpha$, так что выражение в скобках положительно):

$$v_0^2 > \frac{4gl}{\sin 2\alpha} - \frac{2\sqrt{2}gl}{\sin 2\alpha} = \frac{2(2-\sqrt{2})gl}{\sin 2\alpha}.$$

Правая часть меньше v'_{2m} и достигает минимального значения при $\alpha = 45°$, следовательно

$$v_{m2} = \sqrt{2(2-\sqrt{2})lg} \approx \sqrt{1{,}17lg}.$$

Горизонтальная компонента скорости камня неизменна, следовательно участки слева от притягивающего луча и внутри него камень проходит за одно время

$$t_0 = t_1 = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}.$$

Найдём скорость камня при пересечении границы 2

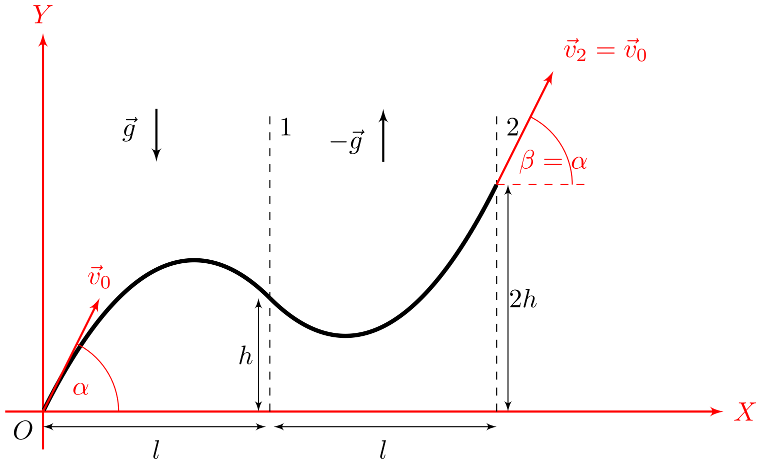
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{g}t_0 - \vec{g}t_1 = \vec{v}_0.$$

Из соображений симметрии (см. рисунок) следует, что камень пересекает границу 2 на высоте $2h$. Время t_2, за которое он после этого упадёт на землю,

$$2h + v_0 \sin \alpha \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0,$$

откуда

$$t_2 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{4h}{g}}.$$



Камень пересекает границу 2 со скоростью $\vec{v}_2 = \vec{v}_0$

Этому соответствует горизонтальное смещение

$$l_2 = v_0 \cos\alpha \cdot t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{4hv_0^2 \cos^2\alpha}{g}}.$$

Подставим в это выражение

$$h = l\mathrm{tg}\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

и получим

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{2lv_0^2 \sin 2\alpha}{g} - 2l^2}.$$

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат

$$l_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

l_2 монотонно возрастает при увеличении $\sin 2\alpha$, следовательно достигает максимального значения при $\alpha = 45°$:

$$l_{m2} = \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

Искомое расстояние $L_{m2} = 2l + l_{m2}$.

$$L_{m2} = 2l + \frac{v_0^2}{2g} + \sqrt{\left(2l + \frac{v_0^2}{2g}\right)^2 - 6l^2}.$$

Поскольку и v_{m2}, и L_{m2} соответствуют броску под углом в $45°$, достаточно подставить $v_0^2 = 2(2-\sqrt{2})gl$ в выражение для L_{m2}. Получим

$$L_{m3} = \left(4 - \sqrt{2} + \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}\right) l$$

или после преобразований

$$L_{m3} = (2 + \sqrt{2})l \approx 3{,}41l.$$

Задача №10-Т2. Раскрутка трением

Рассмотрим момент времени, когда валик и правый диск вращаются с постоянными угловыми скоростями Ω и ω_x соответственно. Введём ось Oy, направленную вдоль оси симметрии валика влево, с началом в центре его правого основания.

Сила трения, действующая на правый диск, меняет своё направление в некоторой точке с координатой y_x. На участке с координатой от 0 до y_x скорость точек валика Ωr больше, чем скорость точек диска $v_x = \omega_x y$, значит сила трения на этом участке направлена по скорости точек валика («от нас»). Аналогично можно показать, что на участке с координатой от y_x до R, сила трения направлена против скорости точек валика («на нас»).

Сила трения, действующая на участке длиной Δy, равна $f\Delta y$, где f — сила трения, приходящаяся на единицу длины. Равнодействующая такой равномерно распределённой силы приложена к середине указанного отрезка. С учётом того, что суммарный момент внешней силы трения, действующей на правый диск, равен нулю, получаем:

$$f y_x \cdot \frac{y_x}{2} = f(R - y_x) \cdot \frac{R + y_x}{2}.$$

Откуда $y_x = R/\sqrt{2}$.

Сила трения, действующая на валик со стороны левого диска меняет своё направление в некоторой точке с координатой y_0. Плечо этой силы равно r, а так как валик равномерно вращается, то суммарный момент силы трения, действующей на валик относительно оси вращения также равен нулю, а значит:

$$f y_x \cdot r + f(2R - y_0) \cdot r = f(y_0 - y_x) \cdot r.$$

Откуда $y_0 = y_x + R = R/\sqrt{2} + R$.

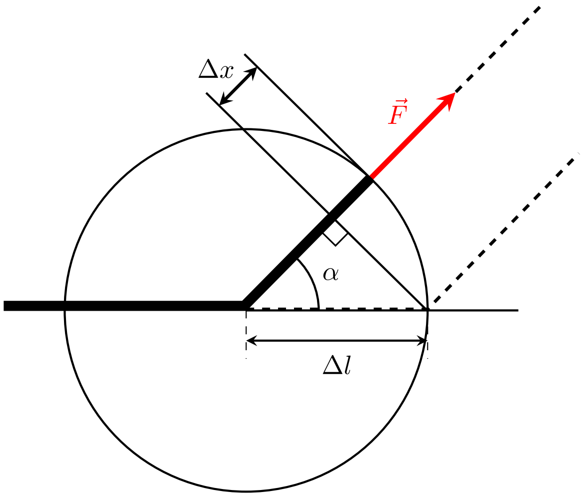
В точках с координатами y_x и y_0, где сила трения меняет направление, скорости точек дисков равны скорости точек валика Ωr. Скорость точки правого диска с координатой y_x равна $\omega_x \cdot y_x = \omega_x \frac{R}{\sqrt{2}}$. Скорость точки левого диска с координатой y_0 равна $\omega_0 \cdot (2R - y_0) = \omega_0 \cdot (R - \frac{R}{\sqrt{2}})$. С учётом этого $\omega_x \frac{R}{\sqrt{2}} = \omega_0 \cdot (R - \frac{R}{\sqrt{2}})$ или

$$\omega_x = \omega_0(\sqrt{2} - 1).$$

Задача №10-Т3. Клейкая лента

Когда приложенная сила F постоянна по величине и направлению, угол наклона оторванной части ленты α также постоянен. Если внешняя сила достаточна по величине и приводит к отрыву части ленты малой длины Δl, точка, к которой приложена внешняя сила, перемещается на расстояние Δx, совершая при этом работу, которую можно связать с величиной σ и площадью ленты оторвавшейся части ленты $\Delta S = d \cdot \Delta l$:

$$\Delta A = \Delta x \cdot F = \sigma \cdot \Delta S = \sigma \cdot d \cdot \Delta l. \qquad (1)$$



Перемещение точки приложения силы Δx может быть выражено через Δl и α:

$$\Delta x = \Delta l \cdot (1 - \cos\alpha). \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем выражение для силы $F = F(\alpha)$, необходимой для отрывания ленты от стола под некоторым углом:

$$F = \frac{\sigma d}{1 - \cos\alpha}.$$

Сила принимает минимальное значение при максимальном знаменателе $1 - \cos\alpha = 2$, то есть при $\alpha = \pi$.

Теперь рассмотрим второй случай. Силы натяжения ленты и нити равны по модулю, так что будем их обозначать T. Из условия равновесия груза $T = mg$.

Очевидно, что если сила натяжения T не превышает силу отрыва ленты для угла α_1, то лента не будет отрываться и система будет покоиться. Максимальная сила T, которая может быть достигнута при равновесии системы $T = \sigma d/(1 - \cos\alpha_1)$. Тогда масса груза равна

$$m = \frac{\sigma d}{(1 - \cos\alpha_1) \cdot g} \approx 0{,}068 \text{ кг}.$$

Теперь рассмотрим случай добавления груза массой M. Для начала определим длину участка ленты ΔL, который оторвался от стола до момента остановки грузов. Его можно выразить через высоту блока H и углы α_1 и α_2:

$$\Delta L = \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha_1} \approx 0{,}732 \cdot H = 0{,}732 \text{ м}.$$

Для нахождения Δh используем условие на сохранение полной длины нити и ленты (ввиду их нерастяжимости):

$$\Delta L + L_1 = L_2 + \Delta h,$$

где $L_1 = H/\sin\alpha_1$ и $L_2 = H/\sin\alpha_2$ — это расстояния от блока до точки отрыва ленты от стола в начальный и конечный момент соответственно. Тогда

$$\Delta h = \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha_2} - \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha_1} + \frac{H}{\sin\alpha_1} - \frac{H}{\sin\alpha_2} =$$

$$= H\left(\frac{1 - \cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} - \frac{1 - \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}\right) \approx 0{,}146 \cdot H = 0{,}146 \text{ м}.$$

Положение, в котором остановится система, определяется законом изменения полной механической энергии: изменение потенциальной энергии груза (кинетическая энергия в крайних положениях равна нулю) равно работе по отрыву ленты:

$$(m + M)g \cdot \Delta h = A = \sigma d \Delta L.$$

Отсюда

$$M = \frac{\sigma d \Delta L}{g \Delta h} - m \approx 0{,}032 \text{ кг} = 32 \text{ г}.$$

Ускорения грузов в начальный и конечный моменты времени находятся из второго закона Ньютона:

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - T(\alpha_1)$$

или

$$(m + M)a_1 = (m + M)g - \frac{\sigma d}{1 - \cos\alpha_1}.$$

Искомые значения:

$$a_1 = g - \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos\alpha_1)} \approx 3{,}2 \text{ м/с}^2,$$

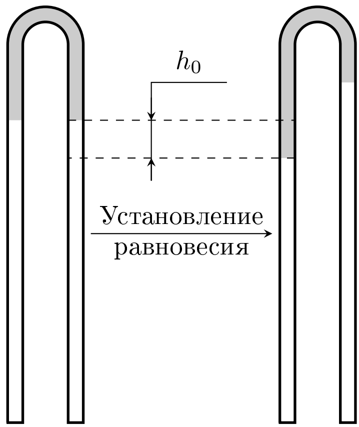
и

$$a_2 = \frac{\sigma d}{(m + M)(1 - \cos\alpha_2)} - g \approx 4{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что после остановки ускорения грузов будут равны нулю.

Задача №10-Т4. Трубка со ртутью

Пусть смещение концов столбика ртути после переворота трубки равно h_0. Разность давлений воздуха в левой и правой частях трубки $\Delta P = P_{\text{л}} - P_{\text{п}}$ уравновешивается избыточным гидростатическим давлением ртути $2\rho g h_0$. Используя закон Бойля-Мариотта, найдем:



$$P_{\text{л}} = P_{\text{А}} \frac{l}{l - h_0}, \quad P_{\text{п}} = P_{\text{А}} \frac{l}{l + h_0}.$$

Запишем условие равновесия столбика ртути:

$$P_{\text{А}} \frac{l}{l - h_0} - P_{\text{А}} \frac{l}{l + h_0} = 2\rho g h_0.$$

После преобразований получаем:

$$\frac{2 l h_0 P_{\text{А}}}{l^2 - h_0^2} = 2\rho g h_0.$$

Решения этого уравнения

$$h_0 = 0,\ h_0 = \pm\sqrt{l\left(l - \frac{P_{\text{А}}}{\rho g}\right)}.$$

При $P_{\text{А}} = 750$ мм рт.ст. > 625 мм рт.ст. $= \rho g l$ подходит только один из корней $h_0 = 0$. Таким образом, сразу после переворота столбик ртути не смещается.

Понижение температуры до $0{,}8\,T_0$ соответствует изменению начального давления воздуха (давления воздуха в трубке с запаянными концами до её переворота) с P_A до $P_1 = 0{,}8\,P_A = \rho g L_1$, где $L_1 = 0{,}8 \cdot 750$ мм $= 600$ мм. В этом случае существует решение:

$$h_1 = \sqrt{l\left(l - \frac{P_1}{\rho g}\right)} = \sqrt{l\,(l - L_1)} = \sqrt{0{,}625\,(0{,}625 - 0{,}600)}\ \text{м} = \frac{l}{5} = 125\ \text{мм}.$$

Можно показать, что именно это решение соответствует устойчивому положению столбика ртути. Корень $h_1 = 0$ мм соответствует неустойчивому положению, то есть при небольшом смещении столбика ртути избыточное гидростатическое давление превышает разность давлений воздуха в левом и правом участках трубки и ртуть стремится занять положение, соответствующее устойчивому положению.

Покажем, что корень $h_1 = 125$ мм соответствует устойчивому равновесию. Пусть от положения равновесия столбик ртути сместилась дополнительно на некоторое малое расстояние x, тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_{\text{л}}(x) = \frac{lP_1}{l - h_1 - x} = \frac{lP_1}{l - h_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{l-h_1}} \approx \frac{lP_1}{l - h_1}\left(1 + \frac{x}{l - h_1}\right) = \frac{lP_1}{l - h_1} + \frac{xlP_1}{(l - h_1)^2}.$$

Аналогично для давления в правой части сосуда:

$$P_{\text{п}}(x) = \frac{lP_1}{l + h_1 + x} \approx \frac{lP_1}{l + h_1} - \frac{xlP_1}{(l + h_1)^2}.$$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$F_{\text{д}}(x) = (P_{\text{л}} - P_{\text{п}})S \approx \left(\frac{lP_1}{l - h_1} - \frac{lP_1}{l + h_1}\right)S + \left(\frac{1}{(l - h_1)^2} + \frac{1}{(l + h_1)^2}\right)xlP_1S =$$

$$= F_{\text{д}}(0) + \frac{2(l^2 + h_1^2)}{(l^2 - h_1^2)^2}xlP_1S.$$

Сила, равная разности сил тяжестей, действующих на столбики ртути в разных частях сосуда, стремится вывести столбик ртути из положения равновесия:

$$F_{\text{т}}(x) = \rho S(l/4 + h_1 + x) - \rho S(l/4 - h_1 - x) = 2\rho g S h_1 + 2\rho g S x = F_{\text{т}}(0) + 2\rho g S x.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учётом равенства $F_{д}(0) = F_{т}(0)$ в положении равновесия:

$$\Delta F = F_{д} - F_{т} = 2\left(\frac{(l^2 + h_1^2)lL_1}{(l^2 - h_1^2)^2} - 1\right)\rho g S x.$$

Подставив в выражение корень $h_1 = 0$, получим:

$$\Delta F = F_{д} - F_{т} = 2\left(\frac{(l^2 + 0^2)lL_1}{(l^2 - 0^2)^2} - 1\right)\rho g S x = 2\left(\frac{L_1}{l} - 1\right)\rho g S x =$$

$$= 2\left(\frac{600\ \text{мм}}{625\ \text{мм}} - 1\right)\rho g S x < 0,$$

т. е. суммарная сила, действующая на систему, будет выводить её из положения равновесия, и $h_1 = 0$ мм соответствует неустойчивому положению равновесия.

Подставив $h_1 = l/5$, получим:

$$\Delta F = F_{давл} - F_{тяж} = 2\left(\frac{(l^2 + (l/5)^2)lL_1}{(l^2 - (l/5)^2)^2} - 1\right)\rho g S x =$$

$$= 2\left(\frac{25 \cdot 26 \cdot L_1}{24^2 \cdot l} - 1\right)\rho g S x = 2\left(\frac{25 \cdot 26 \cdot 600\ \text{мм}}{24^2 \cdot 625\ \text{мм}} - 1\right)\rho g S x =$$

$$= 2\left(\frac{26}{24} - 1\right)\rho g S x > 0,$$

т. е. суммарная сила, действующая на систему, будет стремиться вернуть её в положение равновесия, и $h_1 = l/5 = 125$ мм соответствует устойчивому положению равновесия.

Расчёт по полученной формуле для смещения при начальном давлении $P_2 = 0{,}7\,P_A = \rho g L_2$, где $L_2 = 0{,}7 \cdot 750$ мм $= 525$ мм, соответствующего температуре $T_2 = 0{,}7\,T_0$, даёт результат:

$$h_2 = \sqrt{l\left(l - \frac{P_2}{\rho g}\right)} = \sqrt{0{,}625\,(0{,}625 - 0{,}525)}\ \text{м} = 0{,}25\ \text{м} = 250\ \text{мм} = \frac{2l}{5} > \frac{l}{4}.$$

Но в этом случае столбик ртути целиком перемещается в одну из частей трубки и выражение для избыточного гидростатического давления $2\rho g h_2$ должно быть заменено на $\rho g l/2$.

Пусть столбик ртути целиком перешёл в одну из частей трубки и его нижний конец переместился вниз на h_2, тогда в левой и правой частях трубки давление будет соответственно равно:

$$P_л = P_2 \frac{l}{l-h_2} = \frac{\rho g l L_2}{l-h_2}, \quad P_п = P_2 \frac{l}{l+h_2} = \frac{\rho g l L_2}{l+h_2}.$$

Условие равновесия столбика выглядит теперь следующим образом:

$$\frac{2\rho g l L_2 h_2}{l^2 - h_2^2} = \frac{\rho g l}{2}.$$

Получим квадратное уравнение:

$$h_2^2 + 4L_2 h_2 - l^2 = 0,$$

которое имеет корни

$$h_2 = -2L_2 \pm \sqrt{4L_2^2 + l^2}.$$

Отбросив отрицательный корень, получаем ответ:

$$h_2 = \sqrt{4 \cdot \left(\frac{T_2 P_A}{T_0 \rho g}\right)^2 + l^2} - \frac{2T_2 P_A}{T_0 \rho g} = \sqrt{4 \cdot 0{,}525^2 + 0{,}625^2}\ \text{мм} - 2 \cdot 0{,}525\ \text{мм} \approx 172\ \text{мм}.$$

Покажем, что $h_2 \approx 172$ мм соответствует устойчивому положению равновесия. Пусть от положения равновесия ртуть дополнительно сместилась на малое расстояние $x > 0$, тогда давление газа в левой части сосуда:

$$P_л(x) = \frac{lP_2}{l - h_2 - x} = \frac{lP_2}{l-h_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{l-h_2}} = \frac{lP_2}{l-h_2} + \Delta P_1,\ \Delta P_1 > 0.$$

Аналогично находим давление газа в правой части сосуда:

$$P_п(x) = \frac{lP_2}{l + h_2 + x} = \frac{lP_2}{l+h_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{l+h_2}} = \frac{lP_2}{l+h_2} - \Delta P_2,\ \Delta P_2 > 0.$$

Суммарная сила давления газа, стремящаяся вернуть столбик ртути в положение равновесия, равна

$$F_д = (P_л - P_п)S \approx \left(\frac{lP_2}{l-h_2} - \frac{lP_2}{l+h_2}\right) S + (\Delta P_1 + \Delta P_2)\, S =$$

$$= F_{д0} + (\Delta P_1 + \Delta P_2)\, S.$$

Сила тяжести не изменяется при движении столба жидкости внутри одной части сосуда:

$$F_{\text{т}} = \rho S l g/2.$$

Найдем разность возвращающей и выводящей из положение равновесия сил с учетом равенства $F_{\text{д}0} = F_{\text{т}}$ в положении равновесия:

$$\Delta F = F_{\text{д}} - F_{\text{т}} = (\Delta P_1 + \Delta P_2)\, S > 0,$$

т. е. результирующая сила положительна и положение равновесия устойчиво.

Задача №10-Т5. Термистор

Пусть U_0 — номинальное напряжение источника. Тепловая мощность, выделяющаяся на термисторе, должна в установившемся режиме рассеиваться в окружающий воздух. Поэтому

$$U_0^2 G(t) = k(t - t_{\text{в}}), \qquad (*)$$

где t — собственная температура термистора, $t_{\text{в}}$ — температура воздуха, а k — коэффициент пропорциональности в законе Ньютона-Рихмана. Определяя по графику значение проводимости при температуре $t = 29$ °C

$$G(29\ ^\circ\text{C}) = 1{,}2\, G_{25}$$

и подставляя $t_{\text{в}} = 27$ °C, получим, что

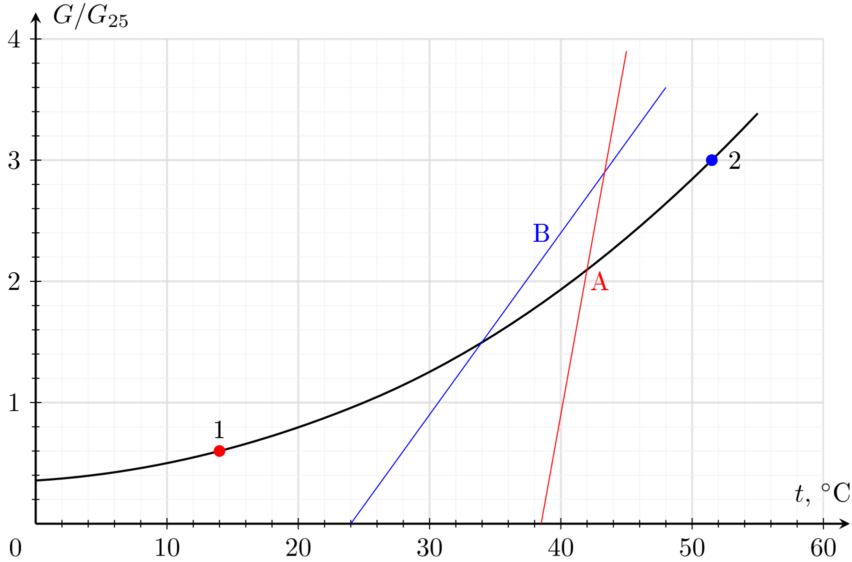
$$k = 0{,}6\, \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot U_0^2 G_{25}.$$

Пусть теперь температура воздуха равна t_1, а температура термистора, соответственно, $(t_1 + 1\ ^\circ\text{C})$.

Подставим эти значения в $(*)$:

$$U_0^2 G(t_1 + 1\ ^\circ\text{C}) = k \cdot 1\ ^\circ\text{C} \qquad \Rightarrow \qquad G(t_1 + 1\ ^\circ\text{C}) = 0{,}6 G_{25}.$$

Данное значение проводимости (точка 1 на рис.) соответствует температуре $t_1 + 1\ ^\circ\text{C} = 14$ °C, откуда $t_1 = 13$ °C.



Пусть теперь $t_в = 38{,}5$ °C. Тогда

$$U_0^2 G(t) = k(t - 38{,}5\ °\mathrm{C}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{G(t)}{G_{25}} = 0{,}6\,\frac{1}{°\mathrm{C}} \cdot (t - 38{,}5\ °\mathrm{C}).$$

Полученное уравнение решим графически, построив прямую, заданную этим уравнением, поверх данного в условии графика (прямая A на рис.). Точка пересечения соответствует температуре термистора $t = 42$ °C.

Пусть при напряжении источника $2U_0$ и температуре воздуха $t_в = 24$ °C, термистор в установившемся режиме имеет температуру t_2. Запишем условие теплового равновесия для термистора и подставим в него выражение для k:

$$4U_0^2 G(t_2) = k(t_2 - t_в) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{G(t_2)}{G_{25}} = 0{,}15\,\frac{1}{°\mathrm{C}} \cdot (t_2 - 24\ °\mathrm{C}).$$

Полученное уравнение снова решим графически, построив прямую, заданную этим уравнением (прямая B на рис.):

$$t_2 = 34\ °\mathrm{C}, \quad G(t_2) = 1{,}5 G_{25}.$$

Однако экран прибора будет показывать не значение t_2, а совершенно другое число $t_* \neq t_2$! Это связано с тем, что встроенный компьютер, переводящий показания амперметра в значение температуры, выводимое на экран настроен на напряжение U_0. Чтобы найти формулу для пересчёта, запишем выражения для силы тока через термистор в двух случаях: 1) напряжение равно U_0, температура равна t_*; 2) напряжение равно $2U_0$, температура — t_2

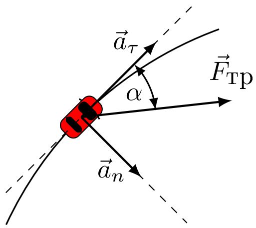
$$I_1 = U_0 G(t_*) \text{ и } I_2 = 2U_0 G(t_2).$$

Приравнивая их, получим

$$G(t_*) = 2G(t_2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{G(t_*)}{G_{25}} = 3.$$

Отсюда, по графику (точка 2 на рис.), определяем, что $t_* \approx 51{,}5$ °C.

Задача №11-Т1. По окружности и побыстрее



В рамках предположений условия максимальная величина сила трения колес о поверхность дороги равна $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu N = \mu m g$, где m — масса автомобиля, и при этом ее можно направить любом направлении в горизонтальной плоскости дороги. Так как другие горизонтальные силы на автомобиль не действуют, то именно сила трения и разгоняет автомобиль, и удерживает его на нужной траектории.

Пусть α — угол между скоростью автомобиля и направлением силы трения в некоторый момент времени (см. рисунок). Тогда уравнения для касательной и центростремительной компонент ускорения автомобиля имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m a_\tau = m\frac{dv}{dt} = \mu m g \cdot \cos(\alpha) \\ m a_n = m\frac{v^2}{R} = \mu m g \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu g R \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right. . \tag{1}$$

Видно, что разгон автомобиля завершается $dv/dt = 0$ и скорость достигает максимального возможного значения $v_m = \sqrt{\mu g R} = 20$ м/с при $\alpha = 90°$. Далее угол α и скорость автомобиля поддерживаются постоянными.

Ответ на второй вопрос можно получить несколькими способами.

Уравнение для касательной компоненты ускорения можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{v \cdot dv}{v \cdot dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha). \tag{2}$$

Здесь s — путь, пройденный автомобилем от момента старта. Далее можно действовать как минимум тремя путями.

Способ 1. Подставив в (2) квадрат скорости из второго уравнения (1), находим, что

$$\mu g R \frac{d(\sin(\alpha))}{ds} = \mu g R \cdot \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow d\alpha = \frac{2}{R} ds.$$

На старте $s = 0$ и $\alpha = 0$, то есть после суммирования приращений в этом соотношении от старта до любого момента времени в процессе разгона получаем связь угла α с пройденным автомобилем расстоянием $\alpha(s) = 2s/R$. Значит, разгон завершится в момент времени, когда $\alpha = \pi/2 \Rightarrow s = \pi R/4$, то есть точно в точке C.

Способ 2. Выразив $\sin(\alpha) = v^2/\mu g R = (v/v_m)^2$ и подставив это соотношение в уравнение (2), приводим его к виду

$$\frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4}.$$

Введем новую переменную $y \equiv (v/v_m)^2$, и получим уравнение

$$\frac{dy}{ds} = \frac{2}{R}\sqrt{1 - y^2} \Rightarrow \frac{2}{R} ds = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Интегрируя его по любому участку пути на дуге AC, находим, что

$$\frac{2}{R} s = \int\limits_0^{(v\ \ /v_m)^2} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin\left(\frac{v^2}{v_m^2}\right) \Rightarrow v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right).$$

Как видно, скорость достигает максимума при $s = \pi R/4$, то есть точно в точке C.

Способ 3. Составив систему из второго уравнения в (1) и (2), можно получить из нее уравнение для зависимости $v^2(s)$ на участке AC

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu g R \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ \frac{d(v^2)}{ds} = \mu g R \cdot \cos(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{d^2(v^2)}{ds^2} = -2\mu g \cdot \sin(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} \\ \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2}{R} \end{array} \right.$$

Действительно, подставляя в уравнение для $d^2(v^2)/ds^2$ полученные выражения для $\sin(\alpha)$ и $d\alpha/ds$, приходим к уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2(v^2)}{ds^2} + \frac{4}{R^2}v^2 = 0.$$

С учетом условий $v^2(0) = 0$ и $(v^2)'_s(0) = \mu g R$ приходим к решению

$$v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right).$$

Как видно, скорость достигает максимума при $s = \pi R/4$, то есть точно в точке C.

Таким образом, во время заезда с минимальным временем прохождения полуокружности скорость автомобиля в точках C, D и B равна максимальной: $v_C = v_D = v_B = v_m = \sqrt{\mu g R} = 20$ м/с.

Ясно, что время прохождения участка полуокружности от C до B равно

$$t_{CB} = \frac{3\pi R}{4v_m} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

В зависимости от способа решения в пункте 2 далее можно использовать разные способы решения и в этом пункте.

Способ 1. Исключим угол α из уравнений (1): на участке AC

$$\sin(\alpha) = \frac{v^2}{\mu g R} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4} \Rightarrow dt = \frac{v_m}{\mu g} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv v/v_m$. На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \beta\sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

Способы 2 и 3. Поскольку на участке AC $v(s) = v_m\sqrt{\sin(2s/R)} = ds/dt$, то:

$$dt = \frac{1}{v_m}\frac{ds}{\sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv \sqrt{\sin(2s/R)}$. Отметим, что

$$\sin\left(\frac{2s}{R}\right) = x^2 \Rightarrow 2\cos\left(\frac{2s}{R}\right)\frac{ds}{R} = 2x dx \Rightarrow \frac{ds}{R} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \beta\sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

В итоге общее время прохождения полуокружности AB

$$T = t_{AC} + t_{CB} = \left(\beta + \frac{3\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{R}{\mu g}} \approx 14{,}7 \text{ с}.$$

Задача №11-Т2. Клейкая лента

См. решение задачи №10-Т3.

Задача №11-Т3. Быстрые поршни

Поскольку поршни лёгкие и могут перемещаться без трения, давление внутри и снаружи одинаковое (равно p_0). Объём газа под поршнем $V = \pi r^2 h$, где h — высота расположения поршня. Уравнение Менделеева-Клапейрона для газа внутри цилиндра

$$p_0 \pi r^2 h = \nu R T.$$

Для малых изменений высоты и температуры

$$p_0 \pi r^2 dh = \nu R dT,$$

где $dh = vdt$.

Изменение температуры газа происходит изобарически. Уравнение теплового баланса для малого промежутка времени $\alpha h 2\pi r(T_0 - T)dt = \nu C_p dT$.

Из трёх записанных уравнений находим связь скорости и температуры:

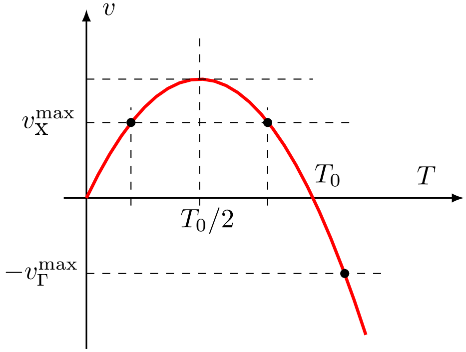
$$v = \frac{2\alpha\nu R^2}{\pi C_p p_0^2 r^3} \cdot T(T_0 - T).$$

Иначе

$$v(T) = aT(T_0 - T),$$

где $a = (2\alpha\nu R^2)/(\pi C_p p_0^2 r^3) = \text{const}$.

Графическое отображение полученной зависимости — парабола, пересекающая ось абсцисс в точках 0 и T_0. Для горячего цилиндра максимальное значение скорости достигается в начальной точке движения при $T = T_\text{г}$ и равно по модулю $v_\text{г}^{\max} = aT_\text{г}(T_\text{г} - T_0)$.



Для холодного цилиндра максимальное значение скорости не определяется однозначно. При $T_\text{х} \geqslant T_0/2$ оно также достигается в начальной точке движения при $T = T_\text{х}$ и равно

$$v_\text{х}^\text{max} = aT_\text{х}(T_0 - T_\text{х}).$$

Если $T_\text{х} < T_0/2$, то максимум скорости соответствует значению $T = T_0/2$ (вершина параболы) и равен

$$v_\text{х}^\text{max} = aT_0^2/4.$$

Приравнивая выражения для скоростей $v_\text{г}^\text{max} = v_\text{х}^\text{max}$, находим искомое.

При $T_\text{х} \geqslant T_0/2$ получим $T_\text{г}(T_\text{г} - T_0) = T_\text{х}(T_0 - T_\text{х})$. Решаем квадратное уравнение (относительно $T_\text{г}$):

$$T_\text{г}^2 - T_\text{г}T_0 - T_\text{х}(T_0 - T_\text{х}) = 0,$$

оставляем только положительный корень.

Итак:

$$T_\text{г} = \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_\text{х}(T_0 - T_\text{х})}}{2}.$$

При $T_\text{х} < T_0/2$ получим $T_\text{г}(T_\text{г} - T_0) = T_0^2/4$. Решаем квадратное уравнение (относительно $T_\text{г}$):

$$T_\text{г}^2 - T_\text{г}T_0 - T_0^2/4 = 0,$$

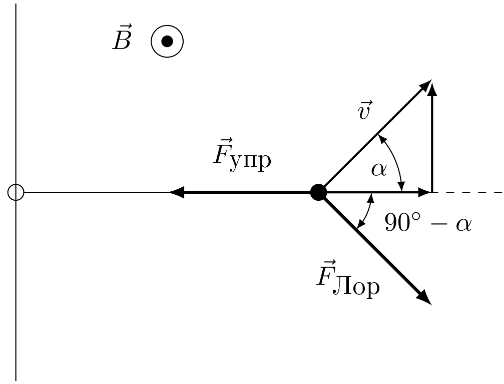
оставляем только положительный корень.

Итак:

$$T_\text{г} = T_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

$$T_\text{г} = \begin{cases} T_0 \cdot \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}, \text{если } T_\text{х} < T_0/2; \\ \dfrac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_\text{х}(T_0 - T_\text{х})}}{2}, \text{если } T_\text{х} \geqslant T_0/2. \end{cases}$$

Задача №11-Т4. Заряд на резинке



Пусть ось x горизонтальна и направлена от спицы, ось y направлена вверх вдоль спицы. Начало координат находится к точке начального положения заряда.

Запишем проекции второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB\cos(90° - \alpha), \\ m\ddot{y} = -qvB\sin(90° - \alpha). \end{cases}$$

Преобразуем полученные уравнения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB\sin(\alpha), \\ m\ddot{y} = -qvB\cos(\alpha). \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qB\dot{y}, \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x}. \end{cases}$$

Способ 1.

Продифференцируем по времени первое уравнение системы. Тогда

$$m\dddot{x} = -k\dot{x} + qB\ddot{y},$$

$$\dddot{x} + \left[\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2\right]\dot{x} = 0.$$

Обозначим $\beta^2 = \frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2$:

$$\dddot{x} + \beta^2\dot{x} = 0.$$

Откуда

$$\dot{x}(t) = C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t).$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0, \\ \ddot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos(\beta t), \\ x(t) = \frac{v_0}{\beta} \sin(\beta t), \\ \dot{y}(t) = \frac{-qBv_0}{m\beta} \sin(\beta t), \\ y(t) = \frac{qBv_0}{m\beta^2} (\cos(\beta t) - 1). \end{cases}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}} \right)^2 + \left(\frac{y(t) + \frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}} \right)^2 = 1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0, y_0) = \left(0, -\frac{qBv_0}{m\beta^2}\right) = \left(0, -\frac{qBmv_0}{km + (qB)^2}\right),$$

большой полуосью

$$a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}} = R\gamma,$$

малой полуосью

$$b = \frac{qBv_0}{m\beta^2} = \frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} = R\gamma^2,$$

где $R = mv_0/qB$ и $\gamma = 1\Big/\sqrt{1 + \frac{mk}{(qB)^2}} < 1$.

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по дуге окружности радиуса $R = (mv_0)/(qB)$.

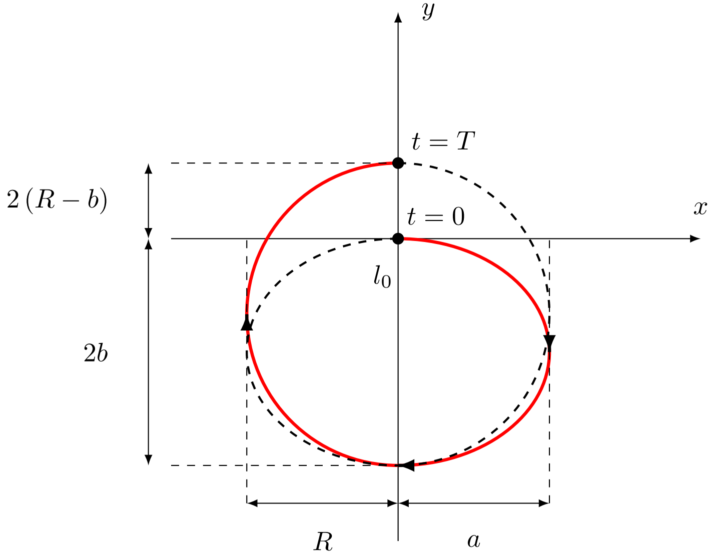
Способ 2.

Из $m\ddot{y} = -qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y = -\frac{qB}{m} dx = -\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y = 0$, $x = 0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y = -\Omega x.$$



Сила Лоренца не совершает работы, и, согласно закону сохранения энергии:

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = \frac{m({v_x}^2 + {v_y}^2)}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Откуда:

$${v_x}^2 = {v_0}^2 - (\Omega^2 + \frac{k}{m})x^2 = {v_0}^2 - \beta^2 x^2,$$

где $\beta^2 = \Omega^2 + \frac{k}{m}$.

Выразим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\Omega x}{\sqrt{{v_0}^2 - \beta^2 x^2}}.$$

Откуда:

$$dy = -\frac{\Omega}{\beta}\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \gamma d(\sqrt{a^2 - x^2}),$$

где $a = v_0/\beta = (mv_0)\Big/\sqrt{km + (qB)^2}$ и $\gamma = \Omega/\beta = 1\Big/\sqrt{1 + \frac{mk}{(qB)^2}} < 1$.

Суммируя малые изменения этих величин, получим:

$$y - 0 = \gamma(\sqrt{a^2 - x^2} - a)$$

Откуда:

$$\left(\frac{y+\gamma a}{\gamma a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2=1.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение эллипса. Координаты центра эллипса $(0,-\gamma a)$, его большая полуось равна $a=(mv_0)\big/\sqrt{km+(qB)^2}=R\gamma$, а малая $b=\gamma a=(qBmv_0)\big/km+(qB)^2=R\gamma^2$. Это уравнение описывает траекторию вплоть до возвращения длины резинки к исходной. Далее заряд попадает в область, где резинка провисает, и он движется по окружности радиуса $R=v_0/\Omega=mv_0/qB$ до возвращения длины резинки к исходной, после чего резинка натягивается и движение повторяется.

Способ 3.

Из второго уравнения системы $m\ddot{y}=-qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y=-\frac{qB}{m}dx=-\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y=0$, $x=0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y=-\Omega x.$$

Подставим это в первое уравнение системы:

$$m\ddot{x}=-kx-qB\Omega x.$$

$$\ddot{x}=-\left(\frac{k}{m}+\Omega^2\right)x$$

Обозначим $\beta^2=\Omega^2+\frac{k}{m}$.

$$x=C_1\cos(\beta t)+C_2\sin(\beta t)$$

Из начальных условий:

$$\begin{cases} x(0)=0\Rightarrow C_1=0,\\ \dot{x}(0)=v_0\Rightarrow C_2=\frac{v_0}{\beta}.\end{cases}$$

$$x=\frac{v_0}{\beta}\sin(\beta t)$$

Подставим в выражение для v_y:

$$\dot{y}=-\Omega x=-\frac{\Omega v_0}{\beta}\sin(\beta t).$$

Интегрируя, получаем:

$$y = \frac{\Omega v_0}{\beta^2}\left(\cos(\beta t) - 1\right).$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{y(t) + \frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}}\right)^2 = 1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0,y_0) = \left(0, -\frac{qBv_0}{m\beta^2}\right) = \left(0, -\frac{qBmv_0}{km + (qB)^2}\right),$$

большой полуосью

$$a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}} = R\gamma,$$

малой полуосью

$$b = \frac{qBv_0}{m\beta^2} = \frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} = R\gamma^2,$$

где $R = mv_0/qB$ и $\gamma = 1\Big/\sqrt{1 + \frac{mk}{(qB)^2}} < 1$.

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по окружности радиуса $R = mv_0/qB$.

При положительном удлинении шнура $\Delta x > 0$ траектория является частью эллипса с большой и малой полуосями: $a = mv_0/\sqrt{km + (qB)^2}$, $b = qBmv_0/(km + (qB)^2)$.

При ненатянутом шнуре $\Delta x = 0$ траектория является частью окружности с радиусом $R = mv_0/qB$.

В целом траектория состоит из последовательно чередующихся половинок эллипса и окружности, которые без излома и без разрыва переходят друг в друга при $x = 0$.

Определим период движения заряда:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2}} + \frac{\pi}{\frac{qB}{m}} = \frac{\pi m}{qB}\left(\frac{qB}{\sqrt{km + (qB)^2}} + 1\right).$$

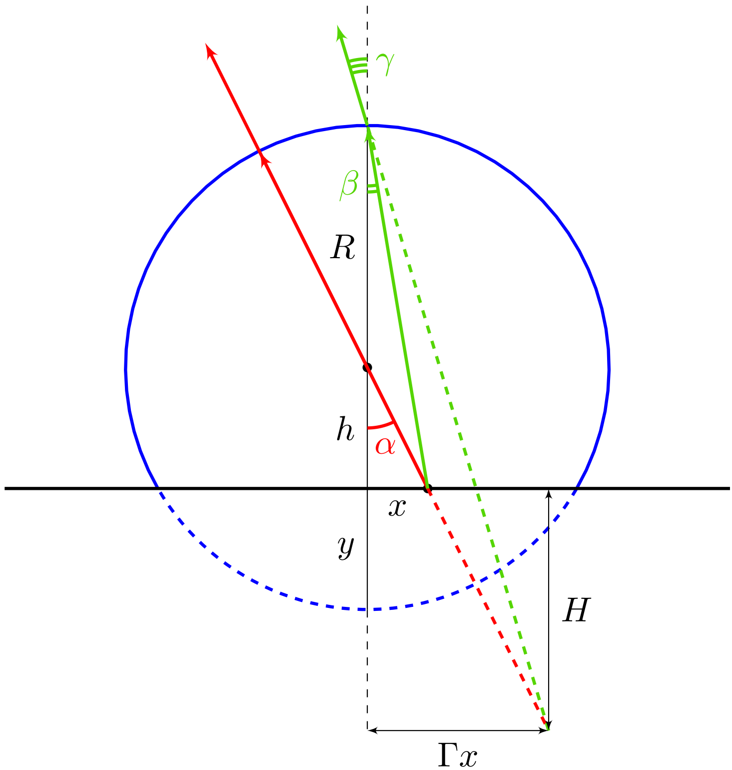
Тогда дрейфовая скорость

$$u = \frac{2\,(R - b)}{T} = \frac{2kmv_0}{\pi\sqrt{km + (qB)^2}\left(qB + \sqrt{km + (qB)^2}\right)}.$$

Задача №11-Т5. Цилиндр

Заметим, что по условию фотографирование происходит с большого расстояния, поэтому можно считать, что увеличение цилиндра в направлении его оси отсутствует. Дополнительно можно убедиться в этом, проверив, что точки пересечения линий миллиметровки и их изображений лежат примерно на оси цилиндра.

Теперь исследуем увеличение для параксиальных лучей в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Пусть расстояние от оси цилиндра до плоскости равно h. Будем считать его положительным, если осталось больше половины цилиндра. Рассмотрим точку, смещённую от плоскости симметрии системы на малое расстояние x. Найдём положение её изображения, образованного параксиальными лучами.



Из закона преломления света получаем:

$$\gamma = n\beta = \frac{nx}{h+R}.$$

Запишем геометрические соотношения.

$$\frac{x(h+H)}{h} = \Gamma x = \frac{nx(h+H+R)}{h+R}.$$

Выразим и подставим значение H.

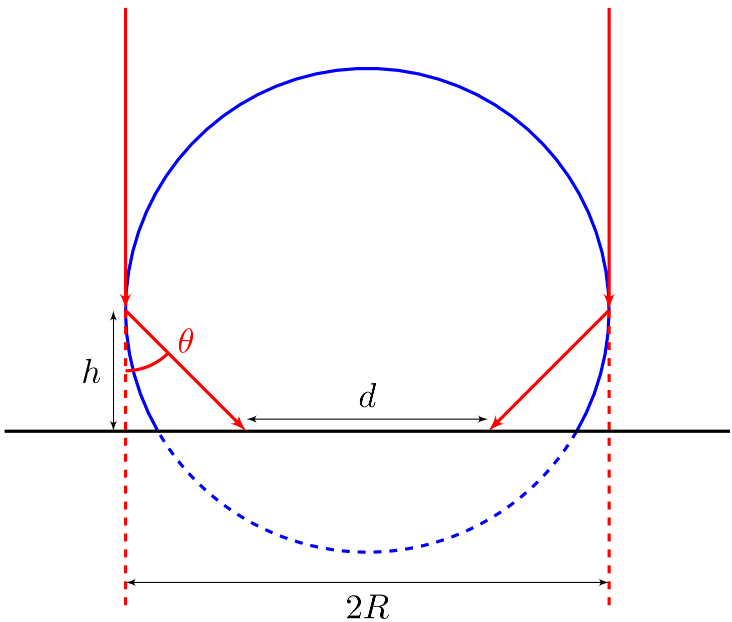
$$H = h(\Gamma - 1)$$

$$\Gamma(h+R) = n\left(\Gamma h + R\right).$$

Получаем искомое увеличение:

$$\Gamma = \frac{nR}{R-(n-1)h}.$$

Заметим, что мы видим не всю миллиметровку, которую закрывает цилиндр. Такое может быть только в случае $h > 0$, то есть отрезали меньше половины цилиндра. По фотографии видно, что область видимости ограничивают лучи, идущие по касательной к цилиндру.



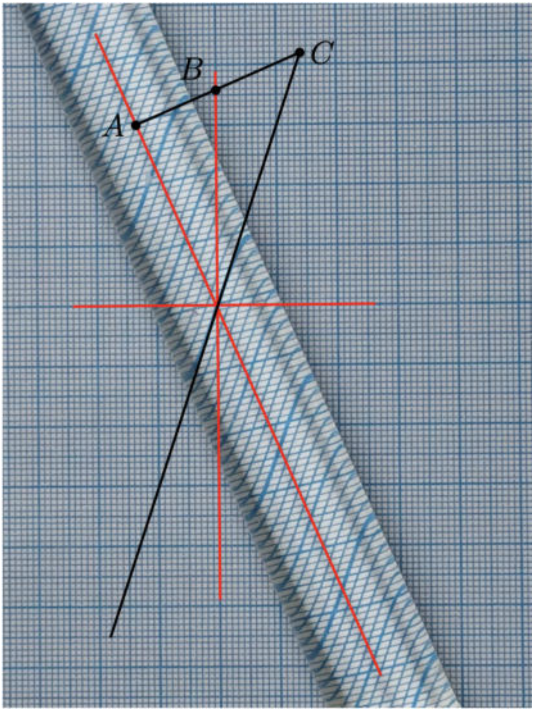
Из закона преломления света имеем:

$$\cos\theta = \frac{1}{n},$$

$$d = 2\left(R - h\mathrm{tg}\theta\right),$$

$$\frac{d}{2R} = 1 - \frac{h\sqrt{n^2 - 1}}{R}.$$

Теперь достаточно измерить по фотографии Γ и d/R. Тогда у нас будет система из двух уравнений с двумя неизвестными.



Проведём ось цилиндра, вертикальную линию миллиметровки и касательную к её изображению в точке на оси цилиндра. Отрезок CA — перпендикуляр из точки касательной на ось цилиндра. Тогда увеличение можно найти по фотографии:

$$\Gamma = \frac{AC}{AB} \approx 2{,}0.$$

Для поиска области видимости можем воспользоваться подобием: для любой прямой можем определить, какую её часть видно через цилиндр. Воспользуемся горизонтальной линией на миллиметровке: закрыто цилиндром 22 мм, видно через цилиндр 9 мм.

$$\frac{d}{2R} \approx 0{,}41.$$

Для удобства введём обозначение $\xi = h/R$.

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{n}{1-(n-1)\xi}; \\ 0{,}41 = 1 - \xi\sqrt{n^2-1}\,. \end{cases}$$

$$\xi = \frac{0{,}59}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{2-n}{2(n-1)}.$$

Получили уравнение на n, которое можно решить численно: $n = 1{,}48$. Подставляя полученное значение в формулы для ξ, получаем:

$$\xi = 0{,}54.$$

При этом искомая величина выражается через ξ:

$$\frac{y}{R} = \frac{R-h}{R} = 1 - \xi = 0{,}46.$$