Всероссийская олимпиада
школьников по экономике

Региональный этап

2020/2021 год

Первый тур. Тест. **Правильные ответы.**

Конкурс
закрасьте кружочек

● **9 класс**
○ **10 класс**
○ **11 класс**

Образец заполнения:

1.	1) ○	2) ●		
6.	1) ○	2) ○	3) ●	4) ○
11.	1) ●	2) ○	3) ○	4) ●
16.	123			☐

Правильные ответы

Задание 1

1.1.	1) ●	2) ○
1.2.	1) ○	2) ●
1.3.	1) ○	2) ●
1.4.	1) ●	2) ○
1.5.	1) ○	2) ●

Задание 2

2.1.	1) ○	2) ○	3) ○	4) ●
2.2.	1) ●	2) ○	3) ○	4) ○
2.3.	1) ○	2) ●	3) ○	4) ○
2.4.	1) ○	2) ●	3) ○	4) ○
2.5.	1) ○	2) ○	3) ●	4) ○

Задание 3

3.1.	1) ○	2) ○	3) ○	4) ●
3.2.	1) ●	2) ●	3) ○	4) ○
3.3.	1) ○	2) ●	3) ●	4) ○
3.4.	1) ●	2) ○	3) ●	4) ●
3.5.	1) ●	2) ○	3) ○	4) ●

Задание 4

4.1.	100
4.2.	на 64 %
4.3.	на 12,5 %
4.4.	на 20 %
4.5.	20

Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Региональный этап

2020/2021 год

Первый тур. Тест. 9 класс.

Правильные ответы и комментарии

Задание 1

5 вопросов типа «Верно/Неверно». Правильный ответ приносит **1 балл**.

1.1. В настоящий момент в экономике производится 9 единиц товара X; использование ресурсов полное и эффективное. Альтернативная стоимость единицы товара X постоянна и составляет 0,5 единицы товара Y. Значит, ради производства дополнительных 4 единиц товара Y придётся отказаться от 8 единиц товара X.

1) Да. 2) Нет.

Комментарий. Альтернативная стоимость (а.с.) икса в игреках и а.с. игрека в иксах являются обратными величинами. Получаем, что а.с. игрека в иксах равна 2, а значит, что ради производства дополнительной единицы Y нужно пожертвовать двумя единицами X. Поскольку а.с. постоянна, 4 единицы Y будут стоить 8 единиц X. Отказ от 8 единиц X возможен, потому что сейчас их производится 9.

1.2. Все экономические исследования предполагают рациональность агентов.

1) Да. **2)** Нет.

Комментарий. Модели с допущениями о нерациональном поведении агентов можно встретить в разделе экономики, который называется *поведенческой экономикой*. За исследования в этой области было присуждено уже несколько Нобелевских премий по экономике.

1.3. Если у страны есть абсолютное преимущество в производстве некоторого блага, она будет экспортировать это благо.

1) Да. **2)** Нет.

Комментарий. Направление торговли определяется сравнительными, а не абсолютными преимуществами.

1.4. На рынке олигополии может производиться как однородный, так и дифференцированный товар.

$\boxed{\textbf{1)}}$ Да. 2) Нет.

Комментарий. Олигополия как рыночная структура характеризуется небольшим числом фирм, каждая из которых оказывает существенное влияние на другие фирмы. Такой рынок может существовать как в условиях производства всеми фирмами однородного товара, так и при наличии дифференциации.

1.5. Одно исследование показало, что люди, прошедшие после увольнения программы повышения квалификации, в среднем зарабатывают больше, чем те, кто их не проходил. Из этого можно сделать вывод о том, что прохождение программ повышения квалификации увеличивает зарплату работников.

1) Да. $\boxed{\textbf{2)}}$ Нет.

Комментарий. Вполне возможно, что люди, идущие на такие программы, являются более мотивированными и организованными, чем те, кто на эти программы не идет. А значит, их бóльший заработок после окончания может не быть следствием прохождения таких программ. *Корреляция* между фактом прохождения программы и будущим доходом не означает наличия причинно-следственной связи между этими переменными.

Задание 2

5 вопросов, в каждом из которых среди четырех вариантов нужно выбрать единственно верный или наиболее полный ответ. Правильный ответ приносит **3 балла**.

2.1. В 2020 году лауреатами Нобелевской премии по экономике *(Премии Шведского государственного банка по экономическим наукам памяти А. Нобеля)* стали Пол Милгром и Роберт Уилсон. За какие заслуги была присуждена премия?

1) разработка оптимального дизайна выборов и голосований;

2) оценка многомерной КПВ мира;

3) анализ эффективности мер по борьбе с коррупцией;

$\boxed{\textbf{4)}}$ усовершенствование теории аукционов.

2.2. В некоторой стране кривая Лоренца имеет вид $y = x^3$. Каково соотношение доходов беднейшей трети, «средней» трети, и богатейшей трети населения?

$\boxed{\textbf{1)}}$ 1:7:19; 2) 1:8:27; 3) 1:7:100; 4) 1:8:100.

Комментарий. Примем доход всей страны за единицу. Тогда доходы беднейшей трети равны $y(1/3) = 1/27$. Доход средней трети равен $(y(2/3) - y(1/3)) = 7/27$. Доход богатейшей трети равен $(1 - y(2/3)) = 19/27$.

2.3. В одной стране уровень инфляции каждый год составляет 200 %. Пусть $p(t)$ — уровень цен в конце года t, год $t = 0$ принят базовым. Тогда:

1) $p(t) = 2^t$; $\boxed{2)}$ $p(t) = 3^t$; 3) $p(t) = 2t$; 4) $p(t) = 3t$.

Комментарий. При уровне инфляции 200% в год уровень цен растет каждый год в три раза.

2.4. Бескупонные облигации фирм A и B имеют срок погашения один год. Доходность облигаций одинакова. Цена облигации A равна 4, номинал облигации B равен 10. Если цена облигации B на 60 % больше, чем номинал облигации A, чему равна доходность этих облигаций?

1) 20 %; $\boxed{2)}$ 25 %; 3) 50 %; 4) 60 %.

Комментарий. Бескупонная облигация выплачивает сумму, равную номиналу, в конце срока погашения. Поэтому цена P, номинал N и доходность r такой облигации связаны уравнением $P = N/(1 + r)$. Поскольку доходности двух облигаций равны, имеем $P_A/N_A = P_B/N_B$, откуда после подстановки данных получаем $1{,}6(N_A)^2 = 40$, или $N_A = 5$. Значит, доходность равна $N_A/P_A - 1 = 25$ %.

2.5. Предельные издержки некой фирмы задаются уравнением $MC = 2q$; выпуск фирмы может быть только целым числом. Чему равна величина $AVC(2020)$ — средние переменные издержки при производстве 205 единиц товара?

1) 2019; 2) 2020; $\boxed{3)}$ 2021; 4) 4040.

Комментарий. При дискретном выпуске

$$VC(q) = MC(1) + MC(2) + \ldots + MC(q) = 2(1 + 2 + \ldots + q) = q(q + 1).$$

Значит, $AVC(q) = q + 1$.

Задание 3

5 вопросов, в каждом из которых среди четырех вариантов нужно выбрать все верные. Правильным ответом считается полное совпадение выбранного множества вариантов с ключом. Правильный ответ приносит **5 баллов**.

3.1. Что не является производным финансовым инструментом (деривативом)?

1) опцион; 2) форвард; 3) фьючерс; $\boxed{4)}$ государственная облигация.

3.2. Рассмотрим совершенно конкурентный рынок с функциями спроса и предложения соответственно $q_d = 90 - p$ и $q_s = p/2$. На рынке вводится потоварный налог на производителей. Что из перечисленного верно?

$\boxed{1)}$ Равновесный выпуск сократится;

$\boxed{2)}$ При ставке налога $t < 45$ выпуск сократится менее чем в два раза;

3) При ставке налога t равновесная цена, уплачиваемая потребителями, вырастет на t;

4) Расходы потребителей могут увеличиться.

Комментарий. Выпуск при введении косвенных налогов всегда сокращается, ответ 1 верен. Несложно найти, что равновесный выпуск как функция от налога ставки налога будет равен $q(t) = (90 - t)/3$, при $t < 45$ $q(t) > 15$, а $q(0) = 30$, значит, ответ 2 также верен. Равновесная цена потребителя равна $90 - q(t) = 60 + t/3$, а значит она растет на $t/3$ после введения налога; ответ 3 неверен. (Если предложение не является абсолютно эластичным, часть налога всегда возьмут на себя производители.) Заметим, что спрос в первоначальной точке ($p_0 = 60$) эластичен, а потому увеличение цены ведет к падению расходов потребителей. При введении налога цена потребителя растет, а значит расходы потребителей должны будут упасть, ответ 4 неверен.

3.3. Какой вид может иметь КПВ страны, если в случае выхода на мировой рынок в качестве малой открытой экономики ее КТВ (кривая торговых возможностей) определяется как $y = 40 - 2x$? Считайте, что международная торговля абсолютно свободна, т.е. происходит без таможенных пошлин, издержек на транспортировку и т.д.

1) $y = 48 - 4x$; $\boxed{2)}$ $y = 40 - 4x$; $\boxed{3)}$ $y = 20 - x$; 4) $y = 16 - x$.

Комментарий. КТВ лежит не ниже КПВ, и при этом две кривые должны иметь хотя бы одну общую точку (эта точка соответствует отсутствию обмена).

3.4. Товары 1 и 2 являются субститутами, а товары 2 и 3 — комплементами. Товар 3 при этом не является комплементом или субститутом к товару 1. Какие события произойдут при росте предложения товара 1?

$\boxed{1)}$ равновесная цена товара 2 упадет;

2) равновесная цена товара 3 вырастет;

$\boxed{3)}$ равновесное количество товара 2 упадет;

$\boxed{4)}$ равновесное количество товара 3 упадет.

Комментарий. Цена товара 1 упадет, а потому спрос на товар 2 упадет, его цена и количество упадут, ответы 1 и 3 верны. При этом упадет и спрос на товар 3, так как он является дополняющим к товару 2 и не зависит непосредственно от товара 1. Поэтому его цена и количество также упадут, ответ 2 неверен, а 4 — верен. Примером к данной ситуации являются коньки, лыжи и лыжные ботинки.

3.5. Две фирмы, производящие один и тот же товар, решили объединиться. Известно, что до слияния функция издержек фирмы 1 задавалась уравнением $TC_1(q_1) = q_1^2$, фирмы 2 — уравнением $TC_2(q_2) = 6q_2 + 49$. Обозначим выпуск объединенной компании за Q. Что из перечисленного верно о функции издержек $TC(Q)$ объединенной фирмы?

$\boxed{1)}$ $TC(Q) \leqslant 6Q + 49$ для любого $Q \geqslant 0$; 2) $TC(Q) \leqslant Q^2$ для любого $Q \geqslant 0$;

3) $TC(2) = 52$; $\boxed{4)}$ $TC(10) = 100$.

Комментарий. Объединенная фирма будет распределять выпуск между заводами первой и второй фирмы так, чтобы издержки были минимальны. Функция $TC(Q)$ объединенной фирмы возвращает минимальные издержки производства выпуска Q.

Поскольку объединенная фирма всегда может произвести выпуск на втором заводе, имеем $TC(Q) \leqslant TC_1(0)+TC_2(Q) = 6Q+49$. Значит, ответ 1 верен. Ответ 2 неверен, так как $TC(0) = 49 > 0^2$. Оптимальное распределение выпуска определяется из решения задачи минимизации $(Q - q_2)^2 + 6q_2 + 49$, где $q_2 \in [0; Q]$ — выпуск на заводе второй фирмы. Отсюда получаем, что $q_2^\star = Q-3$ при $Q \geqslant 3$ и $q_2^\star = 0$ в противном случае. Тот же результат можно получить, сравнивая предельные издержки: «сначала» нужно производить на первом заводе, пока предельные издержки на нем меньше $6 = MC_2$, то есть пока $q_1 \leqslant 3$, а затем весь дополнительный выпуск производить на втором заводе. Отсюда

$$TC(Q) = \begin{cases} TC_1(Q) + TC_2(0) = Q^2 + 49, & Q \leqslant 3; \\ TC_1(3) + TC_2(Q-3) = 6Q + 40, & Q > 3. \end{cases}$$

Значит, ответ 3 неверен, а ответ 4 верен.

Задание 4

5 вопросов с открытым ответом. Правильный ответ приносит **7 баллов**.

Комментарий. В этой части следует засчитывать все правильные по смыслу ответы, в том числе ответы с соответствующими предлогами и единицами измерения. Например, в вопросе 4.2 нужно наряду с ответом «64» засчитывать ответы «на 64», «64 %», «на 64 %», а в вопросе 4.3 — ответы «−0,25» и «−5/4».

4.1. Изначально спрос на «Лекарство №1» описывался уравнением $q_d = 100-p$. После начала пандемии в городе прошли слухи, что этот препарат помогает бороться с вирусом нового типа, после чего спрос на данный препарат вырос до $q_d = 200 - p$, где p — цена за одну пачку препарата, q — дневной объем спроса на препарат (в пачках). Предложение описывается функцией $q_s = p$, оно не поменялось. Мэрия города стала опасаться, что в сложившейся ситуации лекарство станет недоступно для широких масс населения, в связи с чем запретила повышать цену на препарат по сравнению с равновесной ценой до пандемии. Однако данная мера привела к возникновению дефицита препарата. Чему равен размер этого дефицита в пачках?

Ответ: 100.

Комментарий. Изначально цена была равна 50 ($100 - p = p$), при новой функции спроса величина спроса при этой цене равна $200 - 50 = 150$; величина предложения равна 50. Значит, дефицит равен $150 - 50 = 100$.

4.2. В городе N располагается единственный театр, зрительный зал которого способен вместить 400 человек. Изначально спрос на театральные представления описывался уравнением $q_d = 900 - p$, где q — количество проданных билетов, p — цена билета. В условиях пандемии театру разрешили работать только при заполненности зала не более чем на 50%. Кроме того, в связи с пандемией спрос жителей на театральные представления снизился до $q_d = 360 - p$. Театр максимизирует выручку. На сколько процентов театру следует снизить цену в условиях пандемии по сравнению с ситуацией до пандемии?

Ответ: на 64 %.

Комментарий. До пандемии оптимальное количество было равно 400, так как театр максимизирует выручку $TR_0 = (900 - q)q$ на отрезке $[0; 400]$; оптимальная цена равнялась 500. В условиях пандемии фирма будет максимизировать $TR_1 = (360 - q)q$ на отрезке $[0; 200]$. Оптимальным количеством будет 180, оптимальная цена тоже равна 180. Значит, снизить цену нужно на $(500 - 180)/500 = 64\,\%$.

4.3. В малой открытой экономике спрос и предложение на рынке некоторого товара определяются как $q_d = 60 - p$ и $q_s = 0{,}5p$. Мировая цена равна 20 д.е.; кроме того, в стране введена потоварная импортная пошлина в размере 4 д.е. с каждой ввозимой в страну единицы товара. На сколько процентов упадет объем импорта, если импортная пошлина увеличится на 50 %?

Ответ: на 12,5 %.

Комментарий. При импортной пошлине t цена для внутренних потребителей будет $20 + t$, а объем импорта будет равен $q_d(20 + t) - q_s(20 + t) = 30 - 1{,}5t$. При $t = 4$ он равен 24, а при $t = 6$ он равен 21, то есть падает на 12,5%. Тот же ответ можно получить через эластичность: точечная эластичность линейной функции $30 - 1{,}5t$ в точке $t = 4$ равна $-1{,}5t/(30 - 1{,}5t) = -1/4$. Для линейных функций $y = kx + b$ отношение процентных изменений $\Delta\%(y)/\Delta\%(x)$ в точности равно точечной эластичности, а значит, $\Delta\%(Imp)/\Delta\%(t) = -1/4$. Отсюда, $\Delta\%(Imp) = -50/4\% = -12{,}5\%$.

4.4. Некая фирма использует в производстве только труд. Фирма продает товар на совершенно конкурентном рынке по цене 20; производственная функция фирмы имеет вид $Q = L$. На рынке труда фирма является монопсонистом. Труд предлагают две группы работников — мужчины и женщины. Предложение труда мужчин имеет вид $L_s = w$, а предложение труда женщин — вид $L_s = 8 + w$. Изначально фирма назначает разную зарплату для мужчин и женщин. На сколько процентов уменьшится зарплата мужчин, если государство запретит дискриминацию и обяжет платить всем работникам одинаковую зарплату?

Ответ: на 20 %.

Комментарий. Удобнее всего максимизировать прибыль непосредственно по зарплате. При возможности дискриминации фирма максимизирует величину

$$20(L_1 + L_2) - w_1 \cdot L_1 - w_2L_2 = (20 - w_1)L_1 + (20 - w_2)L_2 = (20 - w_1)w_1 + (20 - w_2)(8 + w_2),$$

где w_1 и w_2 — зарплаты мужчин и женщин соответственно. Каждое из слагаемых задает параболу, вершина находится посередине между корнями, откуда $w_1^* = 10$, $w_2^* = 6$. Если запретить дискриминацию, фирма будет максимизировать величину

$$(20 - w)w + (20 - w)(8 + w) = (20 - w)(8 + 2w),$$

откуда $w^* = 8$. Значит, зарплата мужчин снизится на 20 %. В данном примере фирма дискриминирует женщин не из-за того, что они менее производительны, а из-за того, что эластичность их предложения труда по зарплате меньше.

4.5. Робинзон и Пятница собирают кокосы (X) и ловят крокодилов (Y). Из них они готовят блюдо Кроконокосбургер, для приготовления которого требуется 2 кокоса и 1 крокодил (по отдельности блага не потребляются). Известно, что КПВ каждого из островитян линейна, а их суммарная КПВ является ломаной линией, соединяющей точки $(0; 120)$, $(80; 80)$ и $(120; 0)$. При оптимальном разделении труда Робинзон занимается только одним видом деятельности. Сколько Кроконокосбургеров сможет потребить Робинзон, если все ингредиенты он будет добывать сам?

Ответ: 20.

Комментарий. Луч $Y = X/2$ пересекает суммарную КПВ на правом участке, а значит, тот, чья индивидуальная КПВ соответствует правому участку суммарной КПВ, при оптимальном разделении труда занимается обоими видами деятельности. Значит, участок Робинзона — это левый участок суммарной КПВ. Получаем, что его КПВ описывается уравнением $Y = 40 - X/2$. Пересекая ее с лучом $Y = X/2$, получаем, что в одиночку Робинзон будет собирать $X = 40$ кокосов, а значит, потреблять 20 Кроконокосбургеров.

Всероссийская олимпиада
школьников по экономике

Региональный этап

2020/2021 год

Конкурс: **9 класс**

Второй тур. Задачи. **Решения**.

Продолжительность работы — **140 минут**.

Максимальное количество баллов за задачи — **120**.
Каждая задача оценивается из **30 баллов**.

Уважаемые коллеги!

В этом документе вы найдете решения задач регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике 2021 года. Мы надеемся, что сами задания, а также процесс их проверки доставят вам удовольствие.

При проверке задач нужно придерживаться схем, разработанных Центральной предметно-методической комиссией (ЦПМК) по экономике и приведенных в данном документе, а также «Требований к проведению регионального этапа по экономике в 2020/2021 учебном году» (раздел 5). Общие принципы проверки приведены в «Требованиях...» и в списке ниже:

1. Для проверки задач члены жюри делятся на рабочие группы, каждая группа проверяет конкретную задачу, один из членов рабочей группы назначается ее руководителем. Такое разделение труда (при котором отдельные члены жюри проверяют конкретные задачи, а не работы целиком) способствует одинаковому уровню требований к решениям, облегчает разрешение спорных случаев. Состав рабочих групп утверждается председателем жюри или его заместителем. В случае если некоторые рабочие группы завершают проверку своих задач раньше других, их участники могут присоединиться к другим рабочим группам.
2. При наличии возможности желательно организовать проверку каждой задачи в каждой работе не менее чем двумя членами жюри.
3. Жюри проверяет работы в соответствии со схемами проверки, разработанными ЦПМК. В случае наличия в работе участника фрагмента решения, который не может быть оценен в соответствии со схемой проверки, жюри принимает решение исходя из своих представлений о справедливом оценивании, при возможности консультируясь с составителями заданий. Выполнение данного требования имеет исключительную важность, поскольку по итогам регионального

этапа составляется единый рейтинг школьников по России, на основании которого определяется состав участников заключительного этапа.

4. Жюри оценивает только то, что написано в работе участника: не могут быть оценены комментарии и дополнения, которые участник может сделать после окончания тура (например, в апелляционном заявлении).
5. Фрагменты решения участника, зачеркнутые им в работе, не проверяются жюри. Если участник хочет отменить зачеркивание, он должен явно написать в работе, что желает, чтобы зачеркнутая часть была проверена. Если невозможно однозначно определить, хотел ли участник, чтобы фрагмент решения был проверен, этот фрагмент не проверяется.
6. Участник должен излагать свое решение понятным языком, текст должен быть написан разборчивым почерком. При этом жюри не снижает оценку за помарки, исправления, орфографические, пунктуационные и стилистические ошибки, недостатки в оформлении работы, если решение участника можно понять.
7. Все утверждения, содержащиеся в решении участника, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений участника. Участник может не доказывать общеизвестные утверждения. Вопрос определения общеизвестности находится в компетенции жюри, но в любом случае общеизвестными считаются факты, изучаемые в рамках школьной программы. Также, как правило, общеизвестными можно считать те факты, которые многократно использовались в олимпиадах прошлых лет и приводились без доказательств в официальных решениях. Все необщеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Решение, которое явно или скрыто опирается на не доказанные участником необщеизвестные факты, оценивается неполным баллом.
8. Участник может решать задачи любым корректным способом, жюри не повышает баллы за красоту и лаконичность решения, а равно не снижает их за использование нерационального способа. Корректным может быть решение, которое нестандартно и отличается по способу от авторского (приведенного в материалах составителей). При этом недопустимо выставление баллов «за объем»: если участник написал большой текст, не содержащий продвижений в решении задачи, такой текст должен быть оценен в 0 баллов.
9. Работа участника не должна оставлять сомнений в том, каким способом проводится решение задачи. Если участник излагает несколько решений задачи, которые являются разными по сути (и, возможно, приводят к разным ответам), и некоторые из решений являются некорректными, то жюри не обязано выбирать и проверять корректное решение.
10. Если в решении участника содержатся противоречащие друг другу суждения, то они, как правило, не оцениваются, даже если одно из них верное. Нарушение логических последовательностей (причинно-следственных связей), как правило, приводит к существенному снижению оценки.
11. В работе участника должно содержаться доказательство полноты и правильности его ответа, при этом способ получения ответа, если это не требуется для до-

казательства его полноты и правильности, излагать необязательно.

12. Штрафы, которые жюри присваивает за вычислительные ошибки, зависят от серьезности последствий этих ошибок. Вычислительная ошибка, которая не привела к существенному изменению дальнейшего решения задачи и качественно не изменила получаемых выводов, штрафуется меньшим числом баллов, чем вычислительная ошибка, существенно повлиявшая на дальнейшее решение.
13. Если задача состоит из нескольких пунктов, то участник должен четко обозначить, где начинается решение каждого пункта. Каждый фрагмент решения проверяется в соответствии с критериями проверки, разработанными для указанного участником пункта. Если в решении участника одного из пунктов задачи содержится фрагмент решения, который в соответствии со схемой оценивания может принести баллы за другой пункт задачи, жюри может не ставить эти баллы, если из решения неочевидно, что участник понимает применимость результатов к другому пункту. При решении пунктов задачи участник может ссылаться на собственные решения (ответы) к другим пунктам или на общую часть решения, выписанную в начале.
14. Если ошибка была допущена в первых пунктах задачи и это изменило ответы участника в последующих пунктах, то в общем случае баллы за следующие пункты не снижаются, то есть они проверяются так, как если бы собственные результаты, которыми пользуется участник, были правильными. Исключением являются случаи, когда ошибки в первых пунктах упростили или качественно исказили логику дальнейшего решения и/или ответы — в этих случаях баллы за последующие пункты могут быть существенно снижены.
15. Если участник в своем решении опирается на метод перебора вариантов, то для получения полного балла должны быть разобраны все возможные случаи. Упущение некоторых случаев может привести к существенному снижению оценки (непропорциональному доле неразобранных случаев в общем их числе).
16. Если для решения участнику необходимы дополнительные предпосылки, то он должен их сформулировать. Дополнительные предпосылки при этом не должны менять смысл задачи и существенно сужать круг обсуждаемых в решении ситуаций по сравнению с тем, который задан в условии.

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики и подготовке к олимпиадам. От участников не нужно требовать слишком подробного решения — в любом случае руководствуйтесь здравым смыслом и старайтесь определить, действительно ли участник понимает, как решается задача.

При этом помните, что приведенные ниже схемы проверки и обозначенные выше принципы будут применяться во всех регионах; для сопоставимости результатов необходимо следовать им максимально четко. В случае если решение участника не укладывается в предложенную схему проверки, примите решение исходя из своего опыта и справедливости. В спорных случаях пишите нам. Если ЦПМК захочет дать комментарии по проверке отдельных заданий (например, ответить на часто задаваемые вопросы), она сделает это на странице **http://ILoveEconomics.ru/olimp/region/grading**. Если ЦПМК посчитает нужным прояснить какие-либо аспекты авторских решений или схем проверки, она сделает это в день проведения этапа на той же странице, поэтому членам жюри из всех регионов рекомендуется следить за содержанием этой страницы при проверке работ.

Если вам потребуется неотложная консультация в день проведения регионального этапа, вы можете написать ЦПМК по экономике напрямую: cpmk@iloveeconomics.ru.

Ваша ЦПМК

Для справки. Критерии выполнения заданий олимпиады. В таблице приведено количество баллов, при котором задание считается выполненным. Эти сведения нужны для подсчета статистики результатов олимпиады; на индивидуальные результаты участников не влияют.

Номер задания	Баллы
1	2
2	6
3	10
4	14
5	12
6	12
7	12
8	12

Задание 5. *Шок на рынке масок (9 класс)* *(30 баллов)*

Рынок медицинских масок в стране А совершенно конкурентный. В 2019 году недельный рыночный спрос задавался уравнением $Q_d = 55 - P$ (объем — в тыс. шт. в неделю), а недельное рыночное предложение — уравнением $Q_s = P - 11$; на рынке действовало 10 одинаковых фирм.

В 2020 году в связи с пандемией недельный спрос на маски резко вырос (сдвинувшись параллельно). В первые месяцы пандемии число фирм, производящих маски, оставалось тем же, что и в 2019 году, и цена на маски выросла в 4 раза. Во второй половине 2020 года на рынок вошли новые фирмы (использующие ту же технологию производства, что и старые фирмы), и цена опустилась до уровня 2019 года.

а) *(10 баллов)* Определите уравнение недельного спроса в 2020 году.

б) *(12 баллов)* Определите число фирм, вошедших на рынок в 2020 году.

в) *(8 баллов)* Если после окончания пандемии спрос на маски вернется к уровню 2019 года, а число фирм останется тем же, что и в 2020 году, какой будет цена на маски?

Решение

а) В 2019 году выполнялось $55 - P = P - 11$, откуда $P_{19} = 33$ и $Q_{19} = 22$. Значит, в первом полугодии 2020 года цена составила $P_{20} = 4 \cdot 33 = 132$; тогда недельное количество можно найти из не изменившегося предложения: $Q_{20} = P_{20} - 11 = 121$. Если спрос сдвинулся параллельно (т.е. при каждой цене вырос на одну и ту же величину), это значит, что по сравнению с функцией для 2019 года наклон остался единичным, а константа изменилась: $Q_d = a - P$. Зная параметры нового равновесия, составим уравнение $121 = a - 132$, откуда $a = 253$. Итак, спрос в 2020 году имеет вид $Q_d = 253 - P$.

б) Во втором полугодии 2020 года цена составила $P_{20} = P_{19} = 33$, значит, равновесное количество составило $Q_{20} = 253 - P_{20} = 220$. Если $Q_s = P - 11$ — это предложение 10 идентичных фирм, то индивидуальное предложение фирмы задаётся как $q_s = 0{,}1(P - 11)$; при цене 33 д.е. получаем, что каждая фирма производит по $q_s = 2{,}2$, а значит всего на рынке присутствуют $Q_{20}/q_s = 100$ фирм, т.е. на рынок вошло 90 новых фирм.

в) Спрос снова примет вид $Q_d = 55 - P$, а рыночное предложение, возвращаясь к выкладкам пункта **б)**, останется равным $Q_s = 100q_s = 100 \cdot 0{,}1(P - 11) = 10P - 110$. В новом равновесии $55 - P = 10P - 110$, т.е. $P = 15$.

Примечание: Интересно, что после окончания пандемии цена на маски может оказаться ниже, чем до ее начала ($15 < 33$). Это происходит из-за того, что производственные мощности во время пандемии серьезно наращиваются. Однако можно предположить, что такая ситуация низкой цены после пандемии продлится недолго — с течением времени часть фирм уйдет с рынка, и цена вернется к уровню 2019 года.

Схема проверки

а) Всего за пункт — **10 баллов**.

- Найдены равновесные количество масок и цена в 2019 г. — **2 балла**.
- Найдено равновесное количество масок в 2020 г. — **2 балла**.

- Записана через параметр функция спроса (или обратная функция) таким образом, чтобы сдвиг был параллельным (может быть не отдельная запись, а в ходе решения, например, в условии уравновешенности рынка) — **2 балла**.
- Найдено значение параметра (даже если не записан окончательный вид функции спроса) — **4 балла**.

б) Всего за пункт — **12 баллов**.

- Записана функция предложения одной фирмы — **4 балла**.
- Найден объем, который производит каждая фирма при первоначальной цене (и к которой рынок вернулся после появлении на рынке новых фирм) — **2 балла**.
- Найдено равновесное количество масок после выхода новых фирм на рынок — **2 балла**.
- Найдено общее количество фирм на рынке — **2 балла**.
- Указано количество фирм, вышедших на рынок (т.е. дан ответ на сформулированный в задании вопрос) — **2 балла**.

в) Всего за пункт — **8 баллов**.

- Записана функция предложения на рынке (совокупное предложение всех фирм) — **4 балла**.
- Условие уравновешенности рынка масок — **2 балла**.
- Найдена цена на маски — **2 балла**.

Задание 6. *Шарик-бизнесмен* *(30 баллов)*

Матроскин уехал в отпуск и решил оставить на Шарика производство творога. В Простоквашино Шарик является монополистом. Недельный спрос на творог задается функцией $Q = 48 - 2P$, где P — цена (в д.е./кг), Q — объем (в кг). Чтобы произвести Q кг творога, Шарику нужно потратить $t(Q) = Q^2/2$ часов (зависимость нелинейная, так как Шарик устает, и каждый следующий килограмм дается ему труднее). Помимо продажи творога Шарик может давать уроки фотоохоты по цене 2 д.е. в час (число часов урока может быть нецелым). В запасе у него есть 50 часов в неделю на выполнение обоих видов работ (остальное время он восстанавливает силы). Шарик максимизирует свой суммарный доход от двух видов деятельности.

а) *(9 баллов)* Найдите оптимальный для Шарика объем производства творога и максимальный суммарный доход Шарика.

б) *(11 баллов)* Почтальон Печкин предложил Шарику услугу привлечения клиентов с окрестных деревень, в результате которого спрос на творог вырастет до $Q = 72 - 2P$. Печкин просит за услугу 115 д.е. Какой объем производства следует выбрать Шарику, если он согласится на предложение Печкина? Стоит ли ему соглашаться?

в) *(10 баллов)* Допустим, Печкин за свои услуги просит не фиксированную сумму, а взять его в долю. А именно, Печкин просит, чтобы Шарик отдавал Печкину треть выручки от продажи творога. Какой объем производства следует выбрать Шарику, если он согласится? Стоит ли Шарику соглашаться?

Решение

а) Обратная функция спроса имеет вид $P = 24 - Q/2$; выручка Шарика от продажи творога равна $P \cdot Q = (24 - Q/2)Q$.

Выпишем общий доход Шарика: $R(Q, t_u) = (24 - Q/2)Q + 2 \cdot t_u$, где t_u — время, потраченное на уроки фотоохоты. Поскольку $t(Q) + t_u = 50$ и $t(Q) = Q^2/2$, функцию дохода можно записать как

$$R(Q) = (24 - Q/2)Q + 2(50 - Q^2/2) = 24Q - 3Q^2/2 + 100.$$

При этом $Q \in [0; 10]$, так как максимальный объем производства из-за ограничения на общее время равен $\sqrt{50 \cdot 2} = 10$.

Функция дохода является квадратичной, ветви параболы направлены вниз, и вершина находится в точке $Q = 24/(2 \cdot 3/2) = 8$. Поскольку $8 \in [0; 10]$, это и есть оптимальный выпуск.

Ответ: $Q^\star = 8$.

б) Если Шарик согласится, обратная функция спроса примет вид $P = 36 - Q/2$. Аналогично пункту **а)**, запишем доход Шарика

$$\pi = (36 - Q/2)Q + 2(50 - Q^2/2) = 36Q - 3Q^2/2 + 100.$$

Шарик максимизирует на отрезке $[0; 10]$. Вершина параболы в точке $Q = 36/3 = 12$. Вершина находится справа от допустимого отрезка, и поэтому оптимум достигается в правой границе отрезка, то есть при $Q^\star = 10$.

Рассчитаем прирост дохода Шарика, если он согласится. В пункте **а)** доход равен $R_0 = 24 \cdot 8 - 3 \cdot 8^2/2 + 100 = 3 \cdot 8^2 - 1{,}5 \cdot 8^2 + 100 = 196$. В **б)** получаем $R_1 = 36 \cdot 10 - 1{,}5 \cdot 10^2 + 100 = 360 - 150 + 100 = 310$.

Печкин просит 115, и при согласии Шарик получит нетто $210 - 115 = 195 < 196$. Значит, соглашаться не стоит.

Ответ: $Q^\star = 10$, нет.

в) При согласии Печкин будет брать 1/3 от выручки, то есть от величины $(36 - Q/2)Q$. Значит, функция дохода Шарика примет вид

$$(1 - 1/3) \cdot (36 - Q/2)Q + 100 - Q^2 = 24Q - 4Q^2/3 + 100.$$

Шарик максимизирует ее на отрезке $[0; 10]$. Вершина параболы в точке $Q = 24/(8/3) = 9$. Поскольку $9 \in [0; 10]$, эта точка и будет оптимумом. $Q^\star = 9$.

Доход Шарика (уже за вычетом платежа Печкину) равен $R_2 = 24 \cdot 9 - 4 \cdot 9^2/3 + 100 = 9 \cdot 3 \cdot 8 - 9 \cdot 3 \cdot 4 + 100 = 9 \cdot 3 \cdot 4 + 100 = 208$. Поскольку $208 > 196$, нужно соглашаться.

Ответ: $Q^\star = 9$, да.

Примечание: В каждом пункте можно было получить те же ответы, если максимизировать не общий доход, а *экономическую прибыль* от продажи творога, то есть выручку от продажи творога за вычетом экономических издержек. В задаче явные издержки производства творога равны нулю, а неявные издержки равны упущенной выгоде, то есть доходу от уроков, потерянному из-за производства творога. Тогда экономическая прибыль равна

$$\pi(Q) = TR(Q) - 2 \cdot t(Q),$$

где $TR(Q)$– выручка от продажи творога, в то время как суммарный доход равен

$$R = TR(Q) + 2(50 - t(Q)) = \pi(Q) + 100.$$

Таким образом, экономическая прибыль от продажи творога и суммарный доход отличаются лишь на константу, а значит, оптимальные выпуски при максимизации этих функций совпадают.

Схема проверки

Если участник максимизирует не суммарный доход, а экономическую прибыль от продажи творога, балл не снижается.

Под достаточными условиями максимума ниже понимается одно из: ветви параболы направлены вниз, первая производная меняет знак с плюса на минус, вторая производная отрицательна.

За каждую арифметическую ошибку снимается **1 балл** при правильной логике решения.

а) Всего за пункт **9 баллов**.

- Правильное составление функции дохода (или экономической прибыли)— **5 баллов**.

- Нахождение $Q = 8$ — **1 балл**.
- Проверка, того, что $Q = 8$ принадлежит допустимому отрезку $[0; 10]$ — **1 балл**.
- Проверка достаточных условий максимума — **1 балл**.
- Нахождение дохода — **1 балл**.

б) Всего за пункт **11 баллов**.

- Правильное составление функции дохода (или экономической прибыли) — **5 баллов**.
- Нахождение $Q = 12$ — **1 балл**.
- Проверка достаточных условий максимума — **1 балл**.
- Проверка, того, что $Q = 12$ не принадлежит допустимому отрезку $[0; 10]$ — **1 балл**.
- Определение оптимального выпуска $Q^{\star} = 10$ — **1 балл**.
- Нахождение дохода — **1 балл**.
- Сравнение двух величин и правильный вывод о том, соглашаться или нет, — **1 балл**.

в) Всего за пункт **10 баллов**.

- Правильное составление функции дохода (или экономической прибыли) — **5 баллов**.
- Нахождение $Q = 9$ — **1 балл**.
- Проверка достаточных условий максимума — **1 балл**.
- Проверка, того, что $Q = 9$ принадлежит допустимому отрезку $[0; 10]$ — **1 балл**.
- Нахождение дохода — **1 балл**.
- Сравнение двух величин и правильный вывод о том, соглашаться или нет, — **1 балл**.

Задание 7. *Повышенная ставка* *(30 баллов)*

Банки обычно предлагают не один тип вклада, а целую линейку вкладов с разными свойствами и ставками. Например, если вклад нельзя пополнять, то ставка по нему обычно выше. В этой задаче мы рассмотрим данную ситуацию.

Предположим, вам предлагается на выбор два вклада сроком 12 месяцев. Ставка по первому вкладу равна 1 % в месяц, и его можно пополнять на любую сумму с интервалом не менее месяца. Ставка по второму вкладу равна 1,5 % в месяц, но его нельзя пополнять. В данном банке проценты начисляются по методу *простых процентов*, то есть если некая сумма s лежит на вкладе t месяцев по ставке $(100r)$ % в месяц, то в конце срока по ней выплачиваются проценты в размере $t \cdot r \cdot s$.

а) *(10 баллов)* Допустим, у вас изначально есть сумма 500 тыс. рублей, которую вы готовы разместить на вкладе. Из зарплаты вы готовы сберегать 40 тыс. рублей каждый месяц. (Первая зарплата придет к вам через месяц после начала срока вклада.) Какой из двух вкладов выгоднее для вас, если вы хотите накопить как можно бо́льшую сумму к концу срока?

б) *(20 баллов)* Теперь предположим, что вы — менеджер банка, которому нужно спрогнозировать расходы банка на процентные выплаты. Для этого нужно предсказать, сколько людей выберет каждый из указанных выше типов вкладов. Пусть M — сумма, которую человек готов разместить на вкладе в начале срока, а X — сумма, которую он готов сберегать в каждом из последующих месяцев. Пусть $k = M/X$. С помощью маркетингового исследования вы выяснили, что k для разных людей принимает значения от 5 до 15; доли людей с разными значениями k приведены в таблице.

Интервал k	[5; 7]	(7; 9]	(9; 11]	(11; 13]	(13; 15]
Доля людей	10 %	20 %	30 %	30 %	10 %

Считайте, что если человеку безразлично, какой вклад открывать, то он открывает пополняемый. Какой процент людей выберет вклад с возможностью пополнения?

Решение

а) При пополняемом вкладе сумма к концу года составит

$$S_1 = 500 + 500 \cdot 12 \cdot 0{,}01 + 40 \cdot 12 + 40 \cdot 0{,}01 \cdot (11 + 10 + \ldots + 1 + 0) =$$
$$= 500 + 60 + 480 + 40 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{11 \cdot 12}{2} = 1040 + 0{,}4 \cdot 66 = 1066{,}4.$$

При непополняемом вкладе сумма к концу года составит

$$S_2 = 500 + 500 \cdot 12 \cdot 0{,}015 + 40 \cdot 12 = 500 + 5 \cdot 12 \cdot 1{,}5 + 480 = 1070.$$

Таким образом, непополняемый вклад выгоднее.

б) При пополняемом вкладе сумма к концу года составит

$$S_1 = M + M \cdot 12 \cdot 0{,}01 + 12X + X \cdot 0{,}01 \cdot (11 + 10 + \ldots + 1 + 0) = 1{,}12M + 12{,}66X.$$

При непополняемом вкладе сумма к концу года составит

$$S_2 = M + M \cdot 12 \cdot 0{,}015 + 12X = 1{,}18M + 12X.$$

Выгоднее выбирать пополняемый вклад, если $S_1 \geqslant S_2$, то есть $1{,}12M + 12{,}66X \geqslant 1{,}18M + 12X$. После преобразований получаем $0{,}06M \leqslant 0{,}66X$, то есть $k = M/X \leqslant 0{,}66/0{,}06 = 11$.

Таким образом, люди, у которых $5 \leqslant k \leqslant 11$, выберут пополняемый вклад, а люди, у которых $11 < k \leqslant 15$, выберут непополняемый. Значит, доля людей, которые предпочтут пополняемый вклад, равна

$$10\,\% + 20\,\% + 30\,\% = 60\,\%.$$

Ответ: 60 % или 0,6.

Схема проверки

Ответ пункта **а)** может быть получен в пункте **б)**. Действительно, в пункте **а)** $k = 500/40 = 12{,}5 > 11$, и поэтому непополняемый вклад выгоднее. Если участник использует это рассуждение и не приводит расчеты S_1 и S_2 для пункта **а)**, ему или ей все равно ставится **10 баллов** за пункт **а)**.

а) Всего за пункт — **10 баллов**.

- Верно подсчитана сумма к концу года для пополняемого вклада — **4 балла**.
- Верно подсчитана сумма к концу года для непополняемого вклада — **4 балла**.
- На основании корректно рассчитанных сумм сделан вывод, что непополняемый вклад предпочтителен, — **2 балла**.

б) Всего за пункт — **20 баллов**.

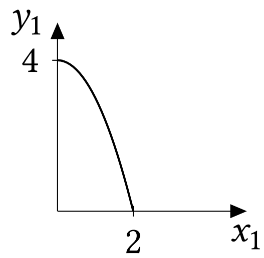
- Корректно записано выражение (от M и X) для суммы к концу года при пополняемом вкладе — **4 балла**.
- Корректно записано выражение (от M и X) для суммы к концу года при непополняемом вкладе — **4 балла**.
- Составлено неравенство, иллюстрирующее, какой вклад при каких параметрах предпочтительнее, — **4 балла**.
- Решено составленное неравенство — получено граничное значение k — **4 балла**.
- Приведена доля людей, предпочитающих пополняемый вклад, — **4 балла**.

Задание 8. *Сложение квадратичных КПВ* *(30 баллов)*

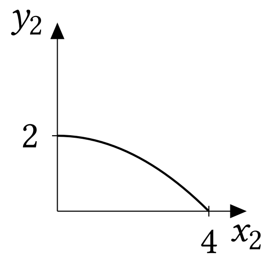
На острове Паабалор есть два племени, живущие охотой и собирательством. Племена потребляют мясо (x) и плоды (y). Уравнения и графики КПВ имеют вид:

$$y_1 = 4 - x_1^2$$
$$y_2 = 2 - x_2^2/8$$

Племя 1



Племя 2



а) *(8 баллов)* Какое максимальное количество плодов может быть собрано на острове, если всего нужно добыть 3 единицы мяса?

б) *(8 баллов)* Какое максимальное количество плодов может быть собрано на острове, если всего нужно добыть 5 единиц мяса?

в) *(14 баллов)* Определите уравнение КПВ острова.

Решение

а) Найдем, как нужно разделить обязанности племен по добыче 3 единиц мяса, чтобы в итоге количество собранных плодов было максимально, то есть решим задачу

$$y_1 + y_2 = 6 - x_1^2 - x_2^2/8 \longrightarrow \max$$

при условии $x_1 + x_2 = 3$, а также $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \in [0; 4]$.

Подставляя в целевую функцию $x_2 = 3 - x_1$, получаем задачу

$$6 - x_1^2 - (3 - x_1)^2/8 \longrightarrow \max .$$

При этом найти максимум этой функции надо на отрезке [0;2], так как первое племя не может добыть больше 2 единиц мяса. При этом производство второго племени будет изменяться от 1 до 3. Эти количества для второго племени возможны, так что дополнительных ограничений не возникает. Находя вершину этой параболы с ветвями вниз, получаем, что $x_1^\star = 1/3$, что принадлежит отрезку [0;2]. Значит, это и есть искомый максимум. Второе племя будет производить $3-1/3 = 8/3$ единиц мяса. Общее количество собранных плодов при этом равно $6 - (1/3)^2 - (8/3)^2/8 = 5$.

Тот же ответ можно получить, если оптимизировать по x_2 функцию $6 - (3 - x_2)^2 - x_2^2/8$. Оптимизировать нужно на отрезке $[1; 3]$, так как $x_2 \leqslant 3$ в силу ограничения на общее количество мяса и $x_1 \geqslant 0$, и $x_2 \geqslant 1$ в силу ограничения на общее количество мяса и $x_1 \leqslant 2$.

Кроме того, точку $x_1^\star = 1/3$ можно получить, приравнивая производную целевой функции к нулю, или, что эквивалентно, приравнивая альтернативные издержки производства для двух племен. Для первого племени альтернативные издержки равны $|(4 - x_1^2)'| = 2x_1$, для второго — $|(2 - x_2^2/8)'| = x_2/4$.

б) Теперь нужно решить задачу

$$y_1 + y_2 = 6 - x_1^2 - x_2^2/8 \longrightarrow \max$$

при условиях $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \in [0; 4]$. Аналогично пункту **а)**, получаем задачу

$$6 - x_1^2 - (5 - x_1)^2/8 \longrightarrow \max .$$

Второе племя не может добыть больше 4 единиц мяса. Значит, первому племени надо будет добыть минимум одну единицу мяса. Таким образом, максимум этой функции мы будем искать на отрезке [1;2]. Вершиной данной параболы с ветвями вниз является точка $x_1 = 5/9 < 1$, и значит, максимум будет достигаться на краю отрезка, в точке $x_1^\star = 1$. Второе племя произведет все оставшиеся четыре единицы, а количество собранных плодов будет равно 3.

Тот же ответ можно получить, если оптимизировать по x_2 функцию $6 - (5 - x_2)^2 - x_2^2/8$. Оптимизировать нужно на отрезке $[3; 4]$; $x_2 \geqslant 3$ в силу ограничения на общее количество мяса и $x_1 \leqslant 2$.

Кроме того, решение $x_1^\star = 1$ можно получить, если заметить, что производная целевой функции $6 - x_1^2 - (5 - x_1)^2/8$ отрицательна на отрезке [1;2], или, что эквивалентно, для любого $x_1 \in [1; 2]$ альтернативные издержки добычи мяса первым племенем в точке x_1 больше, чем альтернативные издержки добычи мяса вторым племенем в точке $5 - x_1$.

в) КПВ есть не что иное, как график функции, показывающей, какое максимальное количество Игрека можно произвести, если всего требуется произвести X единиц Икса. Две точки на КПВ острова мы уже нашли − (3;5) и (5;3). Теперь осталось найти остальные, решив ту же задачу максимизации уже для произвольного значения X, то есть

$$Y = y_1 + y_2 = 6 - x_1^2 - x_2^2/8 \longrightarrow \max$$

при условиях $x_1 + x_2 = X$, $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \in [0; 4]$. Ясно, что $X \in [0; 6]$.

Переходя к оптимизации по одной переменной, получаем задачу

$$6 - x_1^2 - (X - x_1)^2/8 \longrightarrow \max ,$$

где X — параметр.

Если $X \leqslant 4$, эту задачу надо решать на отрезке $[0; 2]$ — для любого $x_1 \in [0; 2]$, второе племя сможет произвести $X - x_1$. Если же $X > 4$, $x_1 \in [X - 4; 2]$, так как первое племя должно будет произвести минимум $X - 4$ единицы мяса.

Нетрудно определить, что вершина параболы с ветвями вниз $6 - x_1^2 - (X - x_1)^2/8$ находится в точке $x_1 = X/9$.

Случай 1. $X \leqslant 4$, и поэтому $x_1 \in [0; 2]$. $X/9$ принадлежит этому отрезку для любого $X \leqslant 4$, а значит, $x_1^\star(X) = X/9$ будет решением задачи. Тогда $Y = 6 - (X/9)^2 - (8X/9)^2/8 = 6 - X^2/9$.

Случай 2. $X \in (4; 6]$, и поэтому $x_1 \in [X - 4; 2]$. $X/9$ принадлежит этому отрезку при $X/9 \geqslant X - 4$, или $X \leqslant 4{,}5$. Значит, решением будет

$$x_1^\star(X) = \begin{cases} X/9, & X \leqslant 4{,}5; \\ X - 4, & X > 4{,}5. \end{cases}$$

Действительно, если вершина параболы с ветвями вниз лежит левее допустимого отрезка, оптимум достигается в левом конце отрезка. При $X > 4{,}5$ максимальное количество собранных плодов будет равно

$$Y = 4 - (X-4)^2 + 0 = 4 - (X-4)^2.$$

Обобщая, получаем, что КПВ острова задается уравнением

$$Y = \begin{cases} 6 - X^2/9, & X \leqslant 4{,}5; \\ 4 - (X-4)^2, & 4{,}5 \leqslant X \leqslant 6. \end{cases}$$

Тот же ответ можно получить, оптимизируя по x_2 и обобщая анализ в пунктах **а)** и **б)**. При $X < 2$ максимизацию по x_2 нужно проводить на отрезке $[0; 4]$, а при $X \geqslant 2$ — на отрезке $[X-2; 4]$. Граничное значение $X = 4{,}5$ определяется из условия $8X/9 = 4$.

Кроме того, решить пункт можно с помощью производной или анализа альтернативных издержек. При $X \leqslant 4{,}5$ является доступным распределение $(x_1, x_2) = (X/9, 8X/9)$, при котором производная целевой функции равна нулю (альтернативные издержки двух племен равны). Поскольку альтернативные издержки обоих племен возрастают, производная целевой функции убывает, и значит, это точка максимума. При $X > 4$ это распределение не является доступным, так как $8X/9 > 4$. При оптимизации по x_1 производная целевой функции отрицательна на отрезке $[X-4; 2]$ — альтернативные издержки первого племени больше в точке x_1, чем альтернативные издержки второго племени в точке $X - x_1$ — и потому оптимальным является минимальное значение x_1, то есть $X - 4$.

Примечание 1: КПВ острова имеет вид

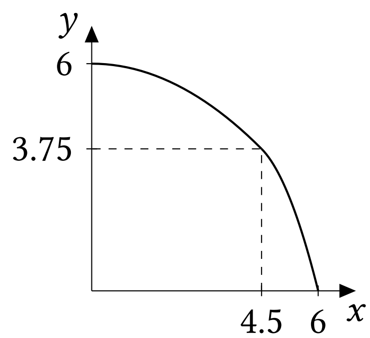


Рис. 8.1: КПВ острова.

Можно показать, что излома в точке (4,5; 3,75) нет, наклон КПВ как при приближении слева, так и при приближении справа к этой точке стремится к единице. Подумайте, почему так происходит.

Примечание 2: В данном случае альтернативные издержки не являются постоянными и стремятся к нулю для малых значений x для обоих племен. Поэтому найти суммарную КПВ методом определения «порядка», в котором племена должны производить x (как в случае, если хотя бы одна из двух КПВ является линейной), не представляется возможным. Тем не менее, найденное решение отражает то, что альтернативные издержки производства Икса для первого племени растут быстрее (то есть оно «в целом хуже» производит Икс). Действительно, при $X < 4{,}5$ при оптимальном распределении производства первое племя производит лишь одну девятую общего объема, а второе — восемь девятых. И лишь когда производственных возможностей второго племени становится недостаточно, доля Икса, произведенного первым племенем, растет.

Схема проверки

а) Всего за пункт — **8 баллов**.

- Выписывание функции двух переменных, которую нужно максимизировать, — **2 балла**.
- Переход к оптимизации по одной переменной — **1 балл**.
- Нахождение кандидата на оптимум x_1 или x_2 через вершину параболы или производную (равенство альтернативных издержек)— **1 балл**.
- Проверка достаточных условий максимума (указание на направление ветвей параболы вниз, на смену знака первой производной с плюса на минус, отрицательность второй производной или указание на то, что альтернативные издержки возрастают) — **1 балл**.
- Проверка того, что найденное значение x_1 принадлежит отрезку $[0; 2]$, — **1 балл**.
- Проверка того, что найденное значение x_2 принадлежит отрезку $[0; 4]$, — **1 балл**.
- Определение максимального значения Y — **1 балл**.

б) Всего за пункт — **8 баллов**.

- Выписывание функции двух переменных, которую нужно максимизировать, — **2 балла**.
- Переход к оптимизации по одной переменной — **1 балл**.
- Правильное определение краевого оптимума $(x_1^\star, x_2^\star) = (1{,}4)$ — **4 балла.**, причем определить его можно двумя способами: (1) найти вершину соответствующей параболы, отметить, что вершина не принадлежит допустимому отрезку, сослаться на направление ветвей параболы и сделать вывод, что оптимум достигается на границе отрезка; (2) с помощью производной доказать, что функция монотонна на допустимом отрезке, и потому оптимум достигается на указанной границе отрезка. Второй способ эквивалентен сравнению альтернативных издержек в соответствующих точках.
- Определение максимального значения Y — **1 балл**.

Если участник сделал вывод, что решение будет в вершине параболы, за пункт при верных вычислениях ставится **3 балла**.

Если участник сослался на симметрию и вывел ответ из результата пункта а): «в а) получилось, что при $X = 3$ максимальное значение Y равно 5, значит при $Y = 5$ максимальное значение X равно 3, и значит, в силу симметрии, при $X = 5$ максимальное Y равно 3, — за пункт ставится **0 баллов**, так как в данной задаче симметрии между X и Y нет, КПВ племен не переходят друг в друга при симметрии относительно $Y = X$, и итоговая КПВ также не является симметричной.

в) Всего за пункт — **14 баллов**.

- Постановка оптимизационной задачи при произвольном X — **5 баллов**.

- Переход к оптимизации по одной переменной — **1 балл**.
- Правильное для каждого X определение отрезка, на котором производится оптимизация, — **2 балла**.
- Определение вершины параболы или точки, где производная равна нулю (альтернативные издержки равны), — **1 балл**.
- Определение того, при каких X решение достигается в вершине параболы, а при каких — на границе отрезка (получение критического значения $X = 4{,}5$) — **4 балла**. Участник должен пояснить, почему оптимум достигается на границе отрезка — либо с помощью ссылки на направление ветвей параболы, либо обосновывая монотонность функции с помощью производной. Если этого не сделано, **1 балл** снимается.
- Расчет максимального значения Y — **1 балл**.