XIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа и предварительные критерии оценки, 1 день

1. *Натуральное число, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде сотен?* (Н. Агаханов)

Решение. Пусть n — данное число, t — его остаток от деления на 40 и от деления на 125. Тогда число $n–t$ делится на $40 = 5\cdot 8$ и на 125, то есть делится на 1000. Значит, разность $n–t$ оканчивается тремя нулями. А остаток $t < 40$. Поэтому в разряде сотен стоит 0.

Критерии. Только ответ: *1 балл*. Отсутствие в решении примера числа, удовлетворяющего условию задачи, *оценки не снижает*.

2. *Числа x и y, не равные 0, удовлетворяют неравенствам $x^2-x > y^2$ и $y^2-y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy (укажите все возможности)?* (Н. Агаханов)

Ответ. Знак плюс. **Первое решение**. Сложив данные неравенства, получим: $x+y < 0$ (*). Перемножив их (это можно делать, так как правые части неотрицательны) получим: $xy(1–x–y) > x^2y^2$. Стало быть, $xy(1–x–y) > 0$. Выражение в скобках положительно в силу неравенства (*), поэтому и произведение xy положительно. **Второе решение**. Пусть одно из чисел (для определенности x) положительно. Тогда из первого неравенства в условии получаем $x^2 > x^2–x > y^2 \geq 0$ и, значит, $x > |y|$. Следовательно, по второму неравенству из условия $y^2+x > y^2+|y| \geq y^2–y > x^2$, поэтому $y^2 > x^2–x$, что противоречит первому неравенству. Таким образом, наше предположение неверно и среди чисел x и y нет положительных. А значит, они оба отрицательны и $xy > 0$.

Критерии. Доказано, что $x+y < 0$, дальнейшего содержательного продвижения нет: *2 балла*. За отсутствие примера, когда выполнены оба неравенства, *оценка не снижается*.

3. *В группе из 79 школьников у каждого 39 знакомых, причем у любого мальчика есть знакомая девочка, а у любой девочки — знакомый мальчик. Может ли оказаться, что все девочки из этой группы имеют в ней поровну знакомых мальчиков, а все мальчики — поровну знакомых девочек? Все знакомства — взаимные.* (С. Берлов)

Ответ. Не может. **Решение**. Предположим противное. Пусть в группе x мальчиков и каждый знает y девочек. Тогда всего в группе будет xy знакомств. У всех девочек должно быть поровну из всех этих знакомств, значит xy делится на $79-x$. Можно считать, что $x \leq 39$ (иначе поменяем мальчиков и девочек ролями). Так как x взаимно просто с $79–x$, на $79–x$ должно делиться число y. Но $79–x \geq 40$, а y по условию не больше 39. Противоречие.

Критерии. Предварительных критериев нет.

4. *Петя и Вася играют в игру. Вася кладёт в ряд 150 монет: некоторые «орлом» вверх, некоторые — «решкой». Петя своим ходом может показать на любые три лежащие подряд монеты, после чего Вася обязан перевернуть какие-то две монеты из этих трёх по своему выбору. Петя хочет, чтобы как можно больше монет лежали «решкой» вверх, а Вася хочет ему помешать. При каком наибольшем k Петя сможет независимо от действий Васи добиться того, чтобы хотя бы k монет лежали «решкой» вверх?* (С. Берлов, Н. Власова)

Ответ. 74. **Решение**. Покажем, как Петя может обеспечить 74 «решки». Разобьем все монеты на пары идущих подряд. На k–ом шаге ($1 \leq k \leq 74$) Петя смотрит на монеты в паре ($2k-1$, $2k$). Если среди них есть хотя бы одна решка, то переходит к следующему шагу. Если среди них нет решки, то Петя указывает на тройку ($2k-1$, $2k$, $2k+1$), после чего в этой паре появляется хотя бы одна решка. Таким образом, через 74 шага в каждой паре монет, кроме последней, будет хотя бы одна решка, то есть решек будет не менее 74.

Покажем, как Вася может помешать Пете положить больше 74 «решек». Изначально Вася кладет орлом вверх все монеты с нечетными номерами, а также монету 150, а все остальные монеты — решкой. Далее он разбивает монеты с номерами 2-149 на пары подряд идущих. Среди любых трех монет, на которые может указать Петя, две монеты обязательно будут из одной пары. Именно их Вася и переворачивает. При такой игре Васи монеты 1 и 150 всегда будут лежать орлом вверх, а в каждой Васиной паре будет ровно один орел и одна решка.

Критерии. Только ответ: *0 баллов*. Только стратегия, позволяющая Пете добиться 74 «решек»: *1 балл за описание и 2 балла за обоснование*. Только стратегия, позволяющая Васе добиться, чтобы число «решек» всегда не превышало 74: *1 балл за описание и 2 балла за обоснование*.

5. *CL — биссектриса треугольника ABC. $CLBK$ — параллелограмм. Прямая AK пересекает отрезок CL в точке P. Оказалось, что точка P равноудалена от диагоналей параллелограмма $CLBK$. Докажите, что $AK \geq CL$.* (С. Берлов)

Первое решение. Обозначим через T точку пересечения диагоналей параллелограмма $CLBK$. В силу свойства биссектрисы и теоремы Фалеса $BC/KL = CT/TL = CP/PL = KP/PA = BL/LA = BC/CA$, откуда $AC = KL$. Но тогда $ACKL$ либо параллелограмм, либо равнобедренная трапеция. Во втором случае $AK = CL$. В первом случае $LB = CK = AL$, поэтому $AC = CB$ и CL — общий перпендикуляр к параллельным прямым CK и AB, а тогда он короче наклонной AK. **Второе решение**. Из условия следует, что точка P равноудалена от прямых KL, BC и AC. Если прямые AC и KL пересекаются (в точке X), то прямая XP — биссектриса угла AXL. По свойству трапеции $ACKL$ эта прямая проходит через середины оснований AL и KC. Поэтому $AX = XL$, трапеция равнобокая и $AK = CL$. Если же $AC \parallel KL$, то $ACKL$ — параллелограмм, $AL = KC = BL$, и биссектриса CL треугольника ABC является медианой. Поэтому она же — и высота, то есть $CL \perp AB$, и расстояние между параллельными прямыми AB и CK равно CL. Следовательно, отрезок AK, соединяющий точки на этих прямых, не короче CL.

Критерии. В рассуждении не возникает случая, когда $AC \parallel KL$: *не более 4 баллов*. «Доказано», что $ACKL$ — равнобокая трапеция (при этом забыт случай, когда это не трапеция): *не более 3 баллов*. Доказано, что $AC = KL$, дальнейшего содержательного продвижения нет: *3 балла*. В решении рассматривается только случай, когда $AC \parallel KL$: *не более 1 балла*.

XIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа и предварительные критерии оценки, 2 день

6. *У уголка из трёх клеток центральной назовём клетку, соседнюю по стороне с двумя другими. Существует ли клетчатая фигура, которую можно разбить на уголки из трех клеток тремя способами так, чтобы каждая ее клетка в одном из разбиений была центральной в своем уголке?* (Д. Демин)

Ответ. Существует. **Решение**. Вырежем у квадрата 4×4 угловые клетки. Легко проверить, что получившуюся фигуру можно разбить на уголки ровно тремя способами, и условие задачи для них выполняется.

Критерии. Только ответ «существует»: *0 баллов*. Фигура указана верно, разрезания не приведены: *5 баллов*.

7. *Точка M — середина стороны AC равностороннего треугольника ABC. Точки P и R на отрезках AM и BC соответственно выбраны так, что AP = BR. Найдите сумму углов ARM, PBM и BMR.* (С. Берлов)

Ответ. 60°. **Решение**. Пусть отрезки AR и BM пересекаются в точке Q. Так как треугольники ABP и BAR равны по первому признаку, $\angle BAR = \angle ABP = \alpha$. Тогда $\angle ARM+\angle BMR = 180°-\angle AQB = 2\alpha+\angle PBM$ (здесь первое равенство — теорема о внешнем угле для треугольника MQR, а второе — теорема о сумме углов для треугольника AQB), откуда $\angle ARM+\angle BMR+\angle PBM = 2(\alpha+\angle PBM) = 2\angle ABM = 60°$.

Критерии. Только ответ: *0 баллов*. Ответ подкреплён подсчетом хотя бы для одного расположения точек P и R при отсутствии доказательства для произвольного расположения этих точек: *1 балл*.

8. *Сначала Саша прямолинейными разрезами, каждый из которых соединяет две точки на сторонах квадрата, делит квадрат со стороной 2 на 2020 частей. Затем Дима вырезает из каждой части по кругу. Докажите, что Дима всегда может добиться того, чтобы сумма радиусов этих кругов была не меньше 1.* (А. Кузнецов)

Решение. Впишем в квадрат круг радиуса 1 и проведем первый разрез. Если он не заденет вписанный круг, вырежем любой круг из части квадрата, не содержащей исходного круга. В противном случае разрез делит исходный круг на два сегмента. Заменим исходный круг двумя вписанными в эти сегменты кругами. Точки их касания с границей исходного круга — концы его диаметра, содержащего середину общей хорды сегментов, где вписанные в сегменты круги касаются друг друга. Теперь проведем второй разрез, рассмотрим пересеченные им части квадрата, получившиеся после первого разреза, и применим к каждой из них описанный выше алгоритм. Далее проделаем то же самое для третьего разреза и т. д. Очевидно, сумма радиусов выбранных кругов при этом не убывает, и после 2020-го разреза она будет не меньше 1.

Критерии. Предварительных критериев нет.

9. *Дано натуральное число n, большее 2. Докажите, что если число $n!+n^3+1$ — простое, то число n^2+2 представляется в виде суммы двух простых чисел.* (Д. Демин)

Решение. Как известно, $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$. Так как оба сомножителя в левой части тут меньше, чем $(n+1)^2$, то если один из них — составное число, то у него есть делитель d, больший 1, но не больший n. Но тогда и число $n!+n^3+1$ делится на d, что противоречит его простоте. Значит, числа n^2-n+1 и $n+1$ — простые, а в сумме они как раз дают n^2+2.

Критерии. Ссылка на гипотезу Гольдбаха (с вычислением чётности n): *0 баллов*.

10. *В квадратной таблице 2021×2021 стоят натуральные числа. Можно выбрать любой столбец или любую строку в таблице и выполнить одно из следующих действий: 1) Прибавить к каждому выбранному числу 1. 2) Разделить каждое из выбранных чисел на какое-нибудь натуральное число. Можно ли за несколько таких действий добиться того, чтобы каждое число в таблице было равно 1?* (М. Дидин)

Ответ. Можно **Решение**. Докажем, что можно сделать первые k столбцов одинаковыми, индукцией по k. *База* — $k = 1$. *Переход*. Пусть первые k столбцов одинаковы. Будем прибавлять к

(k+1)-ому столбцу 1 до тех пор, пока каждое число в нём не станет больше, чем соседнее число в k-ом столбце. Теперь рассмотрим m-ую строку. Пусть на пересечении её с k-ым столбцом стоит a, а на пересечении с (k+1)-ым столбцом — $b > a$. Пусть a при делении на $b–a$ дает остаток r. Прибавим к m-ой строке $b–a–r$ единиц. Теперь первые k+1 чисел в ней делятся на $b–a$. Далее прибавим к каждому из столбцов, начиная с (k+2)-го, по нескольку единиц так, чтобы все оставшиеся числа m-ой строки тоже стали делиться на $b–a$, после чего разделим m-ую строку на b-a. Заметим, что в итоге первые k чисел m-ой строки остались равными, а (k+1)-ое ее число стало на единицу больше каждого из них. Проделаем такую операцию с каждой строкой таблицы. Поскольку к первым k+1 столбцам на каждом этапе 1 добавляется одинаковое количество раз, окажется, что первые k столбцов, по-прежнему равны, а (k+1)-ый — на 1 больше. Прибавив по 1 к первым k столбцам, завершим переход индукции. Когда все столбцы таблицы равны и в каждой строке все элементы одинаковы, завершаем решение делением каждой строки на её элемент.

Критерии. Предварительных критериев нет.