Материалы для проведения регионального этапа

XLVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2020–2021 учебный год

Второй день

6 февраля 2021 г.

Москва, 2021

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, Д. А. Демин, М. А. Дидин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. Т. Крымский, А. С. Кузнецов, С. А. Лучинин, А. К. Львов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020–2021 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **5 февраля 2021 г.** (I тур) и **6 февраля 2021 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2020–2021 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. Десятизначные натуральные числа a, b, c таковы, что $a + b = c$. Какое наибольшее количество из 30 их цифр могут оказаться нечётными? (*И. Богданов*)

Ответ. 29.

Решение. Заметим, что если $a+b = c$, то все три числа a, b, c не могут оказаться одновременно нечётными. Следовательно, среди них есть как минимум одно чётное число, и последняя цифра этого числа также будет чётной. Таким образом, среди 30 цифр есть как минимум одна чётная, а нечётных — не более 29.

Пример $1\,999\,999\,999 + 1\,111\,111\,111 = 3\,111\,111\,110$, показывает, что среди 30 цифр могут оказаться ровно 29 нечётных.

Замечание. Примеров с 29 нечётными цифрами много — например, $3\,999\,999\,999 + 3\,999\,999\,999 = 7\,999\,999\,998$.

Комментарий. Только ответ без каких-либо верных пояснений — 0 баллов.

Только доказательство того, что нечётных цифр не более 29 — 3 балла.

Только верный пример с 29 нечётными цифрами — 3 балла.

9.7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6? (*О. Подлипский*)

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим остатки от деления чисел, расположенных в четырёх угловых клетках, на 3. По принципу Дирихле, как минимум у двух из этих чисел, x и y, эти остатки совпадут, то есть разность $y - x$ делится на 3. Не умаляя общности, положим $x < y$.

Раскрасим клетки нашей таблицы в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, чтобы угловые клетки были чёрными. Рассмотрим клетки с числами $x, x+3, x+6, \ldots, y-3, y$. Любые два из них стоят в клетках с общей стороной — то есть в клетках разного цвета. Значит, все числа в нашей последовательности, имеющие ту же чётность, что и x, стоят в чёрных клетках, а все остальные — в белых. Так как число y стоит в чёрной клетке, оно имеет ту же чётность, что и x, то есть $y - x$ чётно. Значит, $y - x$ делится на 6.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов;

Разбор конкретных примеров расположения чисел не оценивается.

(1) Верно доказано лишь, что разность каких-то двух чисел x и y, расположенных в угловых клетках, делится на три – 2 балла.

(2) Рассмотрена шахматная раскраска и замечено, что числа, отличающиеся на 3, стоят в клетках разных цветов — 2 балла.

(3) После этого замечено, что все угловые клетки одного цвета, и *утверждается*, что тогда числа в клетках x и y одной чётности — ещё 2 балла.

Баллы за продвижения (1)–(3) суммируются. Заметим, что доказательство чётности разности $x - y$ может быть проведено и без использования шахматной раскраски — такое доказательство должно быть оценено соответственно.

Ниже приведены некоторые примечания по поводу них, а также некоторые ошибки, которые могут встретиться в работах.

($1'$) После получения (1) без обоснования утверждается, что числа x и y одной чётности — баллы не добавляются.

($2'$) Идея шахматной раскраски отдельно не оценивается.

($3'$) Даже после получения (2) и (3) утверждение о том, что x и y имеют одну чётность, *нуждается* в небольшом обосновании. Именно, требуется хотя бы упомянуть, что существует путь от x до y, на котором числа в соседних клетках отличаются на 3. (Такое упоминание может быть неявным, например, в индукционном рассуждении.) Если такого упоминания нет, за задачу ставится не более 6 баллов. В частности, критерии (1)–(3) как раз дают сумму 6.

Некоторые участники могут считать, что разность *любых* двух чисел в соседних клетках равна 3. Этот факт неверен; все рассуждения, опирающиеся на этот факт, оцениваются в 0 баллов.

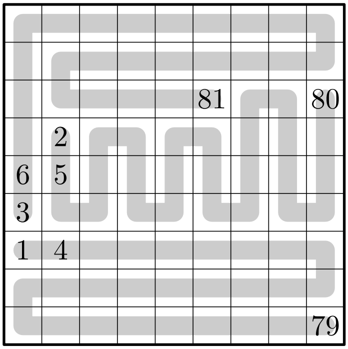

Рис. 1

Некоторые участники могут из утверждения. что любые числа, отличающиеся на 3, стоят в клетках разного цвета (в шахматной раскраске), сделать (неверный!) вывод, что *любые* два соседних числа имеют разную чётность. Если в работе присутствует подобная ошибка, за задачу выставляется не более 5 баллов. (5 баллов выставляется *только* тогда, когда этот аргумент применяется лишь к числам, имеющим один остаток при делении на 3.)

9.8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Оказалось, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на биссектрисе угла BCD. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на биссектрисе угла ADC. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Пусть P и Q — точки пересечения медиан треугольников ABD и ABC соответственно, а K — середина AB.

Достроим треугольник ABD до параллелограмма $ALBD$ (см. рис. 2); тогда $CL = CB + BL = BC + AD$. Диагонали этого параллелограмма пересекаются в точке K, поэтому $DK = KL$. Поскольку $DP = \frac{2}{3}PK$, получаем $DP = \frac{1}{3}DL$, то есть $PL = 2DP$. Значит, по свойству биссектрисы в треугольнике CDL, точка P лежит на биссектрисе угла BCD тогда и только тогда, когда
$$\frac{CL}{CD} = \frac{PL}{PD} = 2,$$
то есть когда $AD + BC = 2CD$.

Аналогично, точка Q лежит на биссектрисе угла ADC при том же самом условии. Отсюда и следует утверждение задачи.

Второе решение. Введём точки P и Q, как в предыдущем

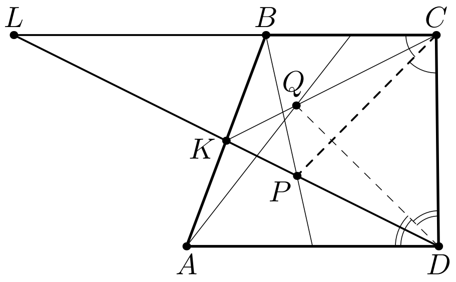

Рис. 2

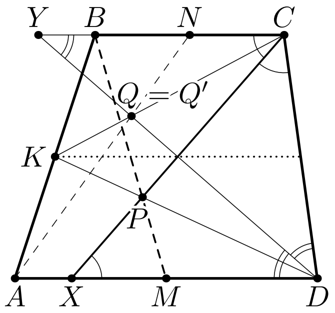

Рис. 3

решении. Пусть M и N — середины AD и BC соответственно. Наконец, пусть биссектрисы углов BCD и ADC пересекают прямые AD и BC в точках X и Y соответственно (см. рис. 3). Поскольку $\angle CXD = \angle XCB = \angle XCD$, имеем $CD = DX$. Аналогично, $CY = CD$.

Поскольку CX проходит через P, треугольники CPB и XPM подобны, причём
$$\frac{BC}{MX} = \frac{BP}{PM} = 2,$$
то есть $BC = 2MX$, Поэтому
$$2CD = 2(XM + MD) = 2MX + 2MD = BC + AD,$$
а значит, $2CY = 2CD = AD + BC$, откуда $NY = CY - BC/2 = AD/2$.

Пусть биссектриса DY пересекает медиану AN в точке Q'. Тогда треугольники $AQ'D$ и $NQ'Y$ подобны с коэффициентом $AD/NY = 2$. откуда $AQ'/Q'N = 2$. Значит, Q' совпадает с Q, что и требовалось доказать.

Замечание. Существуют и другие решения; в частности, можно решить задачу, не приходя к соотношению $AD + BC = 2CD$. Наметим один из таких путей.

Введём точки X и Y, как во втором решении. Равенства $CY = CD = DX$ означают, что $CDXY$ — ромб. Тогда точка S пересечения его диагоналей равноудалена от CY и DX, то есть лежит на средней линии трапеции $ABCD$.

Пусть K — середина AB; тогда $KP : PD = KQ : QC = 1 : 2$. Отсюда несложно вывести, что CP и DQ пересекаются на медиане треугольника KCD из вершины K — то есть опять же на средней линии трапеции $ABCD$. Это значит. что DQ проходит через S, что и требовалось.

Заметим дополнительно, что точка S является серединой средней линии.

Комментарий. Показано только, что из условия следует равенство $AD + BC = 2CD$ — 5 баллов (или 6 баллов, если все переходы в решении очевидно равносильны, но об этом нигде не сказано).

9.9. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

(*Д. Храмцов*)

Ответ. $2n + 1$.

Первое решение. Назовём *длиной* слова количество букв в нём. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — буквы алфавита. Тогда нетрудно проверить, что хорошим является слово

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1\, a_2\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

Осталось показать, что нет хороших слов большей длины.

Предположим, что в n-буквенном алфавите существует хорошее слово длины $2n + 2$. Тогда какая-то буква (скажем, a_1) встречается в нём хотя бы три раза. Отметим её второе (V) и предпоследнее (P) вхождение в слово (тогда V стоит не правее, чем P).

Любая другая буква встречается не более одного раза перед P, а также не более одного раза после V, иначе вычёркиванием можно получить запрещённую последовательность. Значит, каждая из букв $a_2, \ldots, a_n$ встречается не более двух раз. Более того, если такая буква и встречается дважды, то одно из её вхождений стоит до V, а другое — после P.

Пусть a_1 встречается $k \geqslant 3$ раз. Тогда между V и P стоят хотя бы $k - 3$ буквы, отличных от a_1 (по одной между соседними вхождениями a_1), и все такие буквы встречаются ровно по разу. Выделим $k - 3$ таких буквы. Остальные $n - k + 2$ букв могут встречаться максимум по два раза. Поэтому длина слова не превосходит

$$k + (k - 3) \cdot 1 + (n - k + 2) \cdot 2 = 2n + 1,$$

что противоречит нашему предположению.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что длина хорошего слова не превосходит $2n + 1$. Индукция по $n \geqslant 2$. В базовом случае $n = 2$ буквы в слове чередуются, и слово длины хотя бы 6 содержит фрагмент вида $ababab$, из которого вычёркиванием букв можно получить $aabb$.

Для перехода предположим, что в n-буквенном алфавите есть хорошее слово длины, не меньшей $2n + 2$. Тогда какая-то буква a встречается в этом слове хотя бы три раза. Предположим, что букв, встречающихся хотя бы 3 раза, две — a и b. Пусть, без ограничения общности, второе вхождение a стоит раньше второго вхождения b; тогда вычёркиванием букв можно получить слово $aabb$, что невозможно.

Значит, буква a встречается в слове $k \geqslant 3$ раз, а все остальные — максимум по два раза. Тогда длина слова не меньше, чем $2n + 2$, и не больше, чем $k + 2(n - 1)$, откуда $k \geqslant 4$.

Между вторым и третьим вхождением буквы a есть какая-то буква c. Эта буква не может встречаться в других местах: если она встречается после второго вхождения a, то вычёркиванием букв можно получить $aacc$, а если до него — то $ccaa$ (поскольку $k \geqslant 4$).

Пусть соседи буквы c различны. Тогда, удалив её из слова, мы получим хорошее слово в $(n - 1)$-буквенном алфавите (без буквы c). Длина этого слова будет не меньше $2n+1 = 2(n-1)+3$, что противоречит индукционному предположению.

Если же соседи буквы c одинаковы, удалим из слова c и букву перед ней; тогда на этом «стыке» останутся различные буквы. Поэтому мы опять получим хорошее слово в $(n - 1)$-буквенном алфавите, длина которого не меньше, чем $2(n-1)+2$; это опять же невозможно по индукционному предположению.

Комментарий. Только пример хорошего слова из $2n + 1$ букв — 1 балл (этот балл может суммироваться с упомянутыми далее).

Только доказательство, что в хорошем слове не более $2n+1$ букв — 6 баллов.

При доказательстве этой оценки доказано лишь, что максимум одна буква встречается более двух раз — 2 балла (из 6); эти баллы могут складываться с баллами за пример.

9.10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\dfrac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Первое решение. Назовём набор из n чисел в тетради *красивым*, если из него получается требуемый набор наименьших общих кратных. Предположим, что красивый набор из $n > 100$ чисел существует. Выберем из всех таких наборов набор с наименьшей суммой чисел.

Заметим, что если разность полученной прогрессии $d > 0$ имеет общий простой делитель p с каким-нибудь её членом, то все члены этой прогрессии делятся на p, а тогда и все числа красивого набора, за исключением, быть может, одного, также делятся на p. Разделим все эти числа на p (кроме, возможно, того, которое не делится); все выписанные на доску числа тоже разделятся на p и по-прежнему будут последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии, то есть также получится красивый набор. Это противоречит минимальности суммы чисел выбранного набора. Следовательно, d взаимно просто со всеми выписанными на доску числами.

Пусть a — максимальное число нашего красивого набора; тогда $a \geqslant n$. В прогрессии на доске будет не менее $n-1$ членов, кратных a. У каких-то двух из них номера отличаются не более, чем на $\dfrac{n(n-1)}{2} : (n-2) < n$, то есть разность этих членов (также делящаяся на a) равна kd при некотором $k \leqslant n-1 < a$. Но d взаимно просто с a, поэтому kd не может делиться на a — противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем красивый набор с наименьшей суммой и докажем, что разность прогрессии d взаимно проста с любым числом из набора. Далее нам понадобится следующий стандартный факт.

Лемма. *Пусть разность d арифметической прогрессии натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots$ взаимно проста с числом k. Тогда числа, кратные k, идут в этой прогрессии с шагом k (то есть существует такое $i \leqslant k$, что члены, кратные k — это в точности $x_i, x_{i+k}, x_{i+2k}, \ldots$).*

Доказательство. Разности членов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют вид sd при $s < k$, и они не делятся на k. Поэтому все эти члены дают разные остатки при делении на k; значит, они дают все возможные остатки, и один из наших членов делится на k — пусть это x_i. Тогда член x_{i+t} будет делиться на k тогда и только тогда, когда $dt \,\vdots\, k$, то есть когда $t \,\vdots\, k$. $\square$

Пусть теперь p — простой делитель какого-то числа из нашего набора, а p^s — наибольшая степень p, делящая число набора. Пусть a — число из набора, делящееся на p^s. Хотя бы $n-1$ член прогрессии делится на a (и, как следствие, на p^s). Но разность прогрессии не делится на p; значит, лишь каждый p^s-й её член делится на p^s. Значит, в прогрессии хотя бы $p^s(n-2)+1$ членов, то есть $p^s(n-2)+1 \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$, откуда $p^s < n$.

С другой стороны, ни один из как минимум $n-1$ членов прогрессии, делящихся на p^s, не делится на p^{s+1}. Это значит, что количество таких членов меньше p, то есть $n-1 \leqslant p-1$, или $n \leqslant p$. Это противоречит неравенству выше.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда разность прогрессии взаимно проста с каждым её членом — 2 балла.

Лемма из второго решения считается известной; при отсутствии доказательства её (или её аналогов) баллы не снимаются.

10 класс

10.6. На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа a и b, а также их сумму $a+b$. Какое наибольшее количество нечетных цифр могло быть выписано на доске?

(*И. Богданов, П. Кожевников*)

Ответ. 30.

Решение. Заметим, что в числе $a+b$ не более 11 разрядов, таким образом всего на доске выписано не более 31 цифры. При этом все три числа a, b, $a+b$ не могут оказаться одновременно нечётными. Следовательно, одна из их трёх последних цифр — чётная, поэтому нечётных цифр выпсано не более 30.

Приведём пример, показывающий, что нечётных цифр могло оказаться ровно 30:

$5\,555\,555\,555 + 5\,555\,555\,555 = 11\,111\,111\,110.$

Замечание. Примеров с 30 нечётными цифрами много — например, $3\,999\,999\,999 + 7\,999\,999\,999 = 11\,999\,999\,998$.

Комментарий. Только ответ без каких-либо верных пояснений — 0 баллов. Только доказательство того, что нечётных цифр не более 30 — 3 балла. Только верный пример с 30 нечётными цифрами — 4 балла.

10.7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

(*О. Подлипский*)

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим остатки от деления чисел, расположенных в четырёх угловых клетках, на 3. По принципу Дирихле, как минимум у двух из этих чисел, x и y, эти остатки совпадут, то есть разность $y-x$ делится на 3. Не умаляя общности, положим $x < y$.

Раскрасим клетки нашей таблицы в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, чтобы угловые клетки были чёрными. Рассмотрим клетки с числами $x, x+3, x+6, \ldots, y-3, y$. Любые два из них стоят в клетках с общей стороной — то есть в клетках разного цвета. Значит, все числа в нашей последовательности, имеющие ту же чётность, что и x, стоят в чёрных клетках, а все остальные — в белых. Так как число y стоит в чёрной клетке, оно имеет ту же чётность, что и x, то есть $y-x$ чётно. Значит, $y-x$ делится на 6.

Комментарий. Разбор конкретных примеров расположения чисел не оценивается.

По сути верное решение задачи получается из двух соображений:

(а) Все клетки разбиваются на 3 цепочки клеток: $1-4-7-{}$ $-\ldots-79$, $2-5-8-\ldots-80$, $3-6-9-\ldots-81$, поэтому какие-то две угловые клетки принадлежат одной цепочке.

(б) Любой путь от одной угловой клетки до другой угловой клетки состоит из чётного количества ходов (переходов в соседнюю клетку).

Если в работе присутствует только одно из этих двух соображений (а), (б) — ставится оценка 3 балла.

Замечание. Отметим, что (б) можно доказать и без использования шахматной раскраски: так как общее перемещение по горизонтали или вертикали чётно, то чётным будет общее количество ходов каждого из направлений (горизонтальных или вертикальных).

10.8. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK, касаются. *(А. Кузнецов)*

Решение. Проведем биссектрису m угла BCD. По построению, B и D, а также M и K симметричны относительно m.

Из симметрии, BM и DK пересекаются в точке X, лежащей на m. Так как $XM \perp CM$, то $XK \perp CK$, значит, X лежит на окружности (CMK), причём CX — диаметр этой окружности.

Далее $\angle BXD = \angle MXK = 180^\circ - \angle MCK = \angle BCA = {}$ $= \angle BAC = \angle BAD$, поэтому X лежит на окружности (ABD).

Так как m — серединный перпендикуляр к BD, то центр окружности (ABD) лежит на m. Но тогда X лежит на каждой из окружностей (CMK), (ABD) и на их линии центров, следовательно, эти окружности касаются друг друга в точке X.

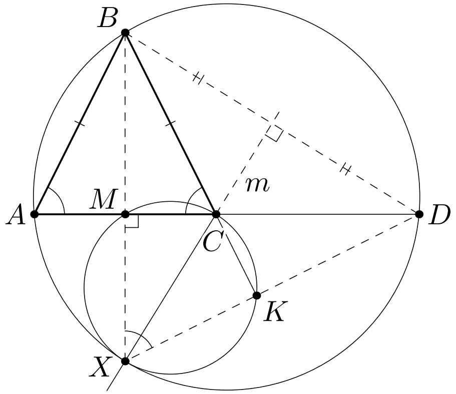

Рис. 4

Комментарий. (a) Заявлено верное описание точки касания X (без доказательства касания) как $BM \cap DK$, либо как точки пересечения BM или DK с биссектрисой угла BCD — 1 балл.

(b) Доказано, что окружность (CMK) проходит через X — 1 балл.

(c) Доказано, что окружность (ABD) проходит через X — 1 балл.

Если в работе есть несколько из продвижений (a), (b), (c), то баллы за них суммируются.

10.9. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. У них есть $n \geqslant 3$ карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$, и ряд из n клеток размером в карточку. Оборотные стороны всех карточек неразличимы. Зритель выкладывает на некоторые два места карточки 1 и 2; помощник фокусника, видя это, выкладывает на свободные места остальные карточки. Затем все карточки переворачиваются числами вниз, и входит фокусник. Он переворачивает одну из карточек, а затем зритель переворачивает другую. После этого фокусник должен правильно указать карточку 1 и правильно указать карточку 2. При каких n фокусник и помощник смогут договориться так, чтобы гарантированно фокус удался? (*И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. При всех n.

Решение. Приведём одну из возможных договорённостей фокусника и помощника. Отметим самое левое место знаком $*$ (карточку на нём перевернёт фокусник). Пронумеруем все остальные места числами от 1 до $n-1$; фокусник и помощник будут считать, что эти места расположены по циклу, то есть место 1 следует за местом $n-1$.

Если на месте $*$ лежит карточка 1 или 2 (пусть для определённости это карточка 1), то помощник выкладывает все свои карточки по возрастанию по циклу за картой 2. Тогда фокусник, увидев карту на месте $*$, восстанавливает циклический порядок всех остальных карт (то есть их порядок с точностью до сдвига по циклу), и по любой карте, открытой зрителем, фокусник сможет определить расположения всех карт.

Пусть теперь карты 1 и 2 лежат в цикле. Тогда помощник считает количество мест i, на которое надо сдвинуться по циклу, чтобы от карточки 1 добраться до карточки 2; тогда $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Далее помощник кладёт на место $*$ карточку $i+2$. Остальные же карточки он выкладывает по возрастанию по циклу за карточкой 1, пропуская место карточки 2. Увидев карточку на месте $*$, фокусник узнаёт число i. По нему он опять же восстанавливает циклический порядок карт на остальных местах, и по любой открытой зрителем карточке он может определить места всех остальных.

Замечание. Существуют и другие стратегии. Однако все работающие стратегии должны обладать следующими свойствами.

Как и в решении выше, обозначим через $*$ место, карточку на котором перевернёт фокусник. Существует $n(n-1)$ возможных расположений карточек 1 и 2; значит, есть столько же возможных расположений всех карт, которые получаются после действий помощника. При этом, для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ карточка i должна оказаться на месте $*$ ровно в $n-1$ из этих расположений. Более того, в этих $n-1$ расположениях любая карточка $j \neq i$ должна располагаться на различных $n-1$ местах (отличных от $*$).

(Выполнения последнего свойства легче всего добиться, сделав так, чтобы эти расположения отличались циклическими сдвигами карточек на местах, отличных от $*$, как в решении выше; можно этого, однако, добиться и другими методами.)

Комментарий. За ответ без обоснования и/или разбор нескольких частных случаев (для небольших значений n) баллы не начисляются.

В решении лишь изложена структура стратегии фокусника с помощником, описанная в комментарии выше (с доказательством, что она должна быть именно такой, или без такого доказательства) — 2 балла.

В работе приведена стратегия, работающая для *бесконечного* множества значений n, с доказательством, что она работает — не менее 3 баллов. При этом, если стратегия *не работает* также для бесконечного множества значений n — ровно 3 балла.

10.10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Первое решение. Назовём набор из n чисел в тетради *красивым*, если из него получается требуемый набор наименьших общих кратных. Предположим, что красивый набор из $n > 100$ чисел существует. Выберем из всех таких наборов набор с наименьшей суммой чисел.

Заметим, что если разность полученной прогрессии $d > 0$ имеет общий простой делитель p с каким-нибудь её членом, то все члены этой прогрессии делятся на p, а тогда и все числа красивого набора, за исключением, быть может, одного, также делятся на p. Разделим все эти числа на p (кроме, возможно, того, которое не делится); все выписанные на доску числа тоже разделятся на p и по-прежнему будут последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии, то есть также получится красивый набор. Это противоречит минимальности суммы чисел выбранного набора. Следовательно, d взаимно просто со всеми выписанными на доску числами.

Пусть a — максимальное число нашего красивого набора; тогда $a \geqslant n$. В прогрессии на доске будет не менее $n-1$ членов, кратных a. У каких-то двух из них номера отличаются не более, чем на $\frac{n(n-1)}{2} : (n-2) < n$, то есть разность этих членов (также делящаяся на a) равна kd при некотором $k \leqslant n-1 < a$. Но d взаимно просто с a, поэтому kd не может делиться на a — противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем красивый набор с наименьшей суммой и докажем, что разность прогрессии d взаимно проста с любым числом из набора. Далее нам понадобится следующий стандартный факт.

Лемма. *Пусть разность d арифметической прогрессии натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots$ взаимно проста с числом k. Тогда числа, кратные k, идут в этой прогрессии с шагом k (то есть существует такое $i \leqslant k$, что члены, кратные k — это в точности $x_i, x_{i+k}, x_{i+2k}, \ldots$).*

Доказательство. Разности членов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют вид sd при $s < k$, и они не делятся на k. Поэтому все эти члены дают разные остатки при делении на k; значит, они дают все возможные остатки, и один из наших членов делится на k — пусть это x_i. Тогда член x_{i+t} будет делиться на k тогда и только тогда, когда $dt \,\vdots\, k$, то есть когда $t \,\vdots\, k$. $\square$

Пусть теперь p — простой делитель какого-то числа из нашего набора, а p^s — наибольшая степень p, делящая число набора. Пусть a — число из набора, делящееся на p^s. Хотя бы $n-1$ член прогрессии делится на a (и, как следствие, на p^s). Но разность прогрессии не делится на p; значит, лишь каждый p^s-й её член делится на p^s. Значит, в прогрессии хотя бы $p^s(n-2)+1$ членов, то есть $p^s(n-2)+1 \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$, откуда $p^s < n$.

С другой стороны, ни один из как минимум $n-1$ членов прогрессии, делящихся на p^s, не делится на p^{s+1}. Это значит, что количество таких членов меньше p, то есть $n-1 \leqslant p-1$, или $n \leqslant p$. Это противоречит неравенству выше.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда разность прогрессии взаимно проста с каждым её членом — 2 балла.

Лемма из второго решения считается известной; при отсутствии доказательства её (или её аналогов) баллы не снимаются.

11 класс

11.6. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6? (*О. Подлипский*)

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим остатки от деления чисел, расположенных в четырёх угловых клетках, на 3. По принципу Дирихле, как минимум у двух из этих чисел, x и y, эти остатки совпадут, то есть разность $y - x$ делится на 3. Не умаляя общности, положим $x < y$.

Раскрасим клетки нашей таблицы в шахматном порядке в чёрный и белый цвета так, чтобы угловые клетки были чёрными. Рассмотрим клетки с числами $x, x+3, x+6, \ldots, y-3, y$. Любые два из них стоят в клетках с общей стороной — то есть в клетках разного цвета. Значит, все числа в нашей последовательности, имеющие ту же чётность, что и x, стоят в чёрных клетках, а все остальные — в белых. Так как число y стоит в чёрной клетке, оно имеет ту же чётность, что и x, то есть $y - x$ чётно. Значит, $y - x$ делится на 6.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов;

Разбор конкретных примеров расположения чисел не оценивается.

(1) Верно доказано лишь, что разность каких-то двух чисел x и y, расположенных в угловых клетках, делится на три – 2 балла.

(2) Рассмотрена шахматная раскраска и замечено, что числа, отличающиеся на 3, стоят в клетках разных цветов — 2 балла.

(3) После этого замечено, что все угловые клетки одного цвета, и *утверждается*, что тогда числа в клетках x и y одной чётности — ещё 2 балла.

Баллы за продвижения (1)–(3) суммируются. Заметим, что доказательство чётности разности $x - y$ может быть проведено и без использования шахматной раскраски — такое доказательство должно быть оценено соответственно.

Ниже приведены некоторые примечания по поводу них, а также некоторые ошибки, которые могут встретиться в работах.

($1'$) После получения (1) без обоснования утверждается, что числа x и y одной чётности — баллы не добавляются.

($2'$) Идея шахматной раскраски отдельно не оценивается.

($3'$) Даже после получения (2) и (3) утверждение о том, что x и y имеют одну чётность, *нуждается* в небольшом обосновании. Именно, требуется хотя бы упомянуть, что существует путь от x до y, на котором числа в соседних клетках отличаются на 3. (Такое упоминание может быть неявным, например, в индукционном рассуждении.) Если такого упоминания нет, за задачу ставится не более 6 баллов. В частности, критерии (1)–(3) как раз дают сумму 6.

Некоторые участники могут считать, что разность *любых* двух чисел в соседних клетках равна 3. Этот факт неверен; все рассуждения, опирающиеся на этот факт, оцениваются в 0 баллов.

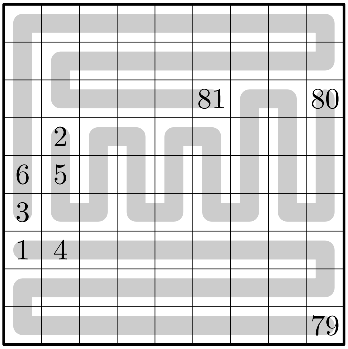

Рис. 5

Некоторые участники могут из утверждения. что любые числа, отличающиеся на 3, стоят в клетках разного цвета (в шахматной раскраске), сделать (неверный!) вывод, что *любые* два соседних числа имеют разную чётность. Если в работе присутствует подобная ошибка, за задачу выставляется не более 5 баллов. (5 баллов выставляется *только* тогда, когда этот аргумент применяется лишь к числам, имеющим один остаток при делении на 3.)

11.7. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая ℓ, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности. (*Р. Женодаров, О. Дмитриев*)

Решение. Пусть углы BAC и BCA треугольника ABC равны, соответственно 2α и 2γ. Углы API и AMI — прямые, поэтому точки A, P, M, I лежат на одной окружности с диаметром AI. Тогда $\angle AMP = \angle AIP =$ (в силу параллельности) $= \angle IAC = \alpha$. Аналогично $\angle QNC = \gamma$. Из равнобедренного треугольника MBN находим: $\angle BMN = \dfrac{180^\circ - \angle MBN}{2} = \alpha + \gamma$. Тогда $\angle PMN = \angle PMA + (180^\circ - \angle BMN) = 180^\circ - \gamma$. Но $\angle PQN = \angle ICN = \gamma$, значит, сумма углов PMN и PQN равна 180°, то есть точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

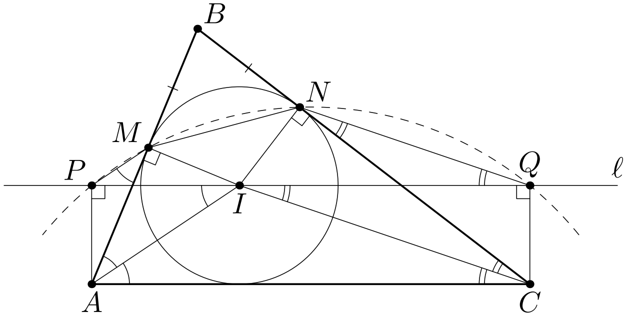

Рис. 6

Замечание. Центр окружности, описанной около четырёхугольника $PMNQ$ — это середина дуги AC окружности, описанной около треугольника ABC.

Комментарий. Показано, что точки A, P, M, I лежат на одной окружности (или аналогичное утверждение) — 1 балл.

11.8. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове. (*Д. Храмцов*)

Ответ. $2n + 1$.

Первое решение. Назовём *длиной* слова количество букв в нём. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — буквы алфавита. Тогда нетрудно проверить, что хорошим является слово

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1\, a_2\, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

Осталось показать, что нет хороших слов большей длины.

Предположим, что в n-буквенном алфавите существует хорошее слово длины $2n+2$. Тогда какая-то буква (скажем, a_1) встречается в нём хотя бы три раза. Отметим её второе (V) и предпоследнее (P) вхождение в слово (тогда V стоит не правее, чем P).

Любая другая буква встречается не более одного раза перед P, а также не более одного раза после V, иначе вычёркиванием можно получить запрещённую последовательность. Значит, каждая из букв $a_2, \ldots, a_n$ встречается не более двух раз. Более того, если такая буква и встречается дважды, то одно из её вхождений стоит до V, а другое — после P.

Пусть a_1 встречается $k \geqslant 3$ раз. Тогда между V и P стоят хотя бы $k-3$ буквы, отличных от a_1 (по одной между соседними вхождениями a_1), и все такие буквы встречаются ровно по разу. Выделим $k-3$ таких буквы. Остальные $n-k+2$ букв могут встречаться максимум по два раза. Поэтому длина слова не превосходит

$$k + (k-3) \cdot 1 + (n-k+2) \cdot 2 = 2n+1,$$

что противоречит нашему предположению.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что длина хорошего слова не превосходит $2n+1$. Индукция по $n \geqslant 2$. В базовом случае $n = 2$ буквы в слове чередуются, и слово длины хотя бы 6 содержит фрагмент вида $ababab$, из которого вычёркиванием букв можно получить $aabb$.

Для перехода предположим, что в n-буквенном алфавите есть хорошее слово длины, не меньшей $2n+2$. Тогда какая-то буква a встречается в этом слове хотя бы три раза. Предположим, что букв, встречающихся хотя бы 3 раза, две — a и b. Пусть, без ограничения общности, второе вхождение a стоит раньше второго вхождения b; тогда вычёркиванием букв можно получить слово $aabb$, что невозможно.

Значит, буква a встречается в слове $k \geqslant 3$ раз, а все остальные — максимум по два раза. Тогда длина слова не меньше, чем $2n+2$, и не больше, чем $k+2(n-1)$, откуда $k \geqslant 4$.

Между вторым и третьим вхождением буквы a есть какая-то буква c. Эта буква не может встречаться в других местах: если она встречается после второго вхождения a, то вычёркиванием букв можно получить $aacc$, а если до него — то $ccaa$ (поскольку $k \geqslant 4$).

Пусть соседи буквы c различны. Тогда, удалив её из слова, мы получим хорошее слово в $(n-1)$-буквенном алфавите (без буквы c). Длина этого слова будет не меньше $2n+1 = 2(n-1)+3$, что противоречит индукционному предположению.

Если же соседи буквы c одинаковы, удалим из слова c и букву перед ней; тогда на этом «стыке» останутся различные буквы. Поэтому мы опять получим хорошее слово в $(n-1)$-буквенном алфавите, длина которого не меньше, чем $2(n-1)+2$; это опять же невозможно по индукционному предположению.

Комментарий. Только пример хорошего слова из $2n+1$ букв — 1 балл (этот балл может суммироваться с упомянутыми далее).

Только доказательство, что в хорошем слове не более $2n+1$ букв — 6 баллов.

При доказательстве этой оценки доказано лишь, что максимум одна буква встречается более двух раз — 2 балла (из 6); эти баллы могут складываться с баллами за пример.

11.9. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень 10^5, а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена

$$R(x) = P(x^{1000}+1) - P(x)^{1000}.$$

(*И. Богданов*)

Ответ. $99 \cdot 10^6$.

Первое решение. Обозначим $n = 1000$, $k = 100$, то есть степени рассматриваемых многочленов P равны nk.

Лемма. *Существует единственный многочлен P степени nk (со старшим коэффициентом 1) такой, что степень полученного многочлена R будет меньше, чем $nk(n-1)$.*

Доказательство. Запишем наш многочлен как

$$P(x) = x^{nk} + p_1x^{nk-1} + p_2x^{nk-2} + \ldots + p_{nk}.$$

Обозначим $F(x) = P(x^n+1)$ и $G(x) = P(x)^n$; это — многочлены степени n^2k со старшим коэффициентом 1.

В многочлене $F(x)$ коэффициент p_j участвует лишь в членах степени, не большей $n(nk-j)$. Значит, для любого $i = 1, 2, \ldots, nk$ коэффициент при x^{n^2k-i} в многочлене $F(x)$ зависит лишь от коэффициентов p_j при $j \leqslant i/n < i$. С другой стороны, коэффициент при этой же степени в $G(x)$ есть $np_i + A$, где A зависит лишь от коэффициентов p_j при $j < i$. Если мы хотим, чтобы степень R была меньше, чем $nk(n-1)$, то эти коэффициенты должны быть равны; это равенство даёт однозначное выражение p_i через $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$ (в частности, p_1 находится единственным образом). Значит, из этих равенств по очереди находятся все коэффициенты многочлена $P(x)$. $\square$

Теперь достаточно предъявить многочлен $P(x)$ такой, что степень R окажется меньше, чем $nk(n-1)$ — по лемме, он единственный, и он и даст минимальную степень R. Положим $P(x) = (x^n+1)^k$. Тогда многочлен

$$R(x) = ((x^n+1)^n+1)^k - (x^n+1)^{nk} = \\ = k\cdot(x^n+1)^{n(k-1)} + C_k^2(x^n+1)^{n(k-2)} + \ldots$$

имеет степень всего лишь $n^2(k-1) < nk(n-1)$. Значит, наименьшая возможная степень R и есть $n^2(k-1) = 99\cdot 10^6$.

Замечание. В решении выше искомый многочлен «угадан». Это можно сделать, рассмотрев достаточно «маленький» случай (например, $k = 2$). Другой способ найти требуемый многочлен виден в следующем решении.

Второе решение. Используем те же обозначение n и k, что и в первом решении. Мы будем считать, что

$$\deg R < n^2k - nk \qquad (*)$$

(впоследствии мы увидим, что это возможно; поэтому для многочлена R минимальной степени так считать можно).

Предположим, что в многочлене $P(x)$ есть одночлен степени, не кратной n; пусть a_sx^s — такой одночлен наибольшей степени. Тогда коэффициент многочлена R при $x^{nk(n-1)+s}$ равен $-na_s$, что противоречит $(*)$.

Таким образом, в предположении $(*)$, степени всех одночленов в $P(x)$ кратны n; иначе говоря, существует такой многочлен Q, что $P(x)=Q(x^n)$. Тогда

$$R(x)=P(x^n+1)-P(x)^n=Q((x^n+1)^n)-Q(x^n)^n,$$

то есть $R(x)=R_1(x^n)$, где

$$R_1(y)=Q((y+1)^n)-Q(y)^n;$$

при этом $\deg Q=k<n$, а предположение $(*)$ означает, что $\deg R_1<nk-k$.

Рассмотрим многочлен $R_2(x)=R_1(x-1)=Q(x^n)-Q(x-1)^n$ (тогда $\deg R_2=\deg R_1$). Аналогично рассуждению выше, предположим, что $Q(x-1)\neq x^k$, то есть в многочлене $Q(x-1)$ есть одночлены, кроме x^k; пусть $b_t x^t$ — такой одночлен наибольшей степени. Тогда в многочлене $R_2(x)$ есть одночлен $-nb_t x^{nk-k+t}$, что противоречит неравенству $\deg R_2<nk-k$. Таким образом, $Q(x-1)=x^k$, а тогда $Q(x)=(x+1)^k$ и $P(x)=(x^n+1)^k$. Мы приходим к тому же примеру, что и в первом решении (и видим, что в этом случае степень R действительно удовлетворяет $(*)$).

Комментарий. Перечисленные ниже баллы за различные продвижения не складываются друг с другом.

Приведён лишь верный пример многочлена P, для которого $\deg R=n^2(k-1)$, без доказательства его оптимальности — 3 балла.

Доказано только, что в *оптимальном* многочлене P нет одночленов степени, не делящейся на n (условие оптимальности может быть заменено на разумные предположения о степени R, как во втором решении) — 1 балл.

Доказано только, что существует ровно один многочлен P, удовлетворяющий условию, при котором $\deg R<nk(n-1)$ — 2 балла.

11.10. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x,y,z на доске стираются, а вместо них выписываются числа $x+\dfrac{1}{yz}$, $y+\dfrac{1}{zx}$, $z+\dfrac{1}{xy}$. Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел. (*С. Кудря*)

Первое решение. Заметим сразу, что все числа, появляющиеся на доске, положительны и рациональны. Пусть x_n, y_n, z_n — числа на доске после n минут, а $a = x_0$, $b = y_0$, $c = z_0$ — исходные числа.

Положим $F_n = 1 + \dfrac{1}{x_n y_n z_n}$. Тогда $x_{n+1} = x_n F_n$, $y_{n+1} = y_n F_n$ и $z_{n+1} = z_n F_n$. В частности, $\dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \dfrac{y_n}{x_n} = \ldots = \dfrac{b}{a}$ и, аналогично, $\dfrac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = \dfrac{c}{a}$.

Положим $\Pi_n = x_n y_n z_n$, и пусть $\Pi_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ — представление этого числа в виде несократимой дроби. Тогда $F_n = \dfrac{p_n + q_n}{p_n}$, и потому

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n F_n^3 = \frac{(p_n + q_n)^3}{p_n^2 q_n}\,,$$

где последняя дробь также несократима (ибо p_n и q_n взаимно просты). Итак, $p_{n+1} = (p_n + q_n)^3$ и $q_{n+1} = p_n^2 q_n$. В частности, $p_n = (p_{n-1} + q_{n-1})^3 \geqslant (1+1)^3 = 8$ при $n \geqslant 1$, и потому $q_n \geqslant 8^2 q_{n-1} > q_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Иными словами, последовательность $q_1, q_2, q_3, \ldots$ строго возрастает.

Обозначим через D произведение всех числителей и знаменателей чисел a, b и c. Тогда при некотором N имеем $q_N > D^2$. Докажем, что с N-й минуты все числа на доске нецелые. Действительно, пусть, скажем, x_n — целое при $n \geqslant N$. Тогда $y_n = x_n \cdot \dfrac{b}{a}$, $z_x = x_n \cdot \dfrac{c}{a}$, и потому

$$\Pi_n = x_n^3 \cdot \frac{bc}{a^2}\,.$$

Знаменатель этого числа в несократимой записи делит D^2; но это невозможно, ибо $q_n \geqslant q_N > D^2$. Противоречие.

Замечание. Поскольку на $(n+1)$-й минуте знаменатель произведения $\Pi = xyz$ увеличивается в p_n^2 раз, а знаменатель каждого из чисел x, y, z (в несократимой записи) увеличивается не более чем в p_n раз (ибо $x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{p_n + q_n}{p_n}$), может возникнуть иллюзия, что знаменатель каждого из чисел x, y, z не уменьшается. Это не так: например, при $x_n = \dfrac{4}{3}$, $y_n = \dfrac{3}{2}$, $z_n = \dfrac{1}{7}$ получаем $\Pi_n = \dfrac{2}{7}$, и потому $x_{n+1} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{9}{2} = 6$ имеет меньший знаменатель, чем x_n (и является целым, хотя на предыдущем шаге целых чисел не было).

Призываем быть внимательными к подобным аргументам. (Объяснение «парадокса» простое: знаменатель числа П может быть существенно меньше, нежели произведение знаменателей чисел x, y и z.)

Второе решение. Мы используем те же обозначения x_n, y_n, z_n, $\Pi_n = \frac{p_n}{q_n}$ и $F_n = 1 + \frac{1}{\Pi_n}$, что и в первом решении, вместе с формулами

$$x_{n+1} = x_n F_n, \quad y_{n+1} = y_n F_n, \quad z_{n+1} = z_n F_n,$$
$$p_{n+1} = (p_n + q_n)^3, \quad q_{n+1} = p_n^2 q_n. \tag{$*$}$$

Обозначим $r_n = p_n + q_n$; тогда $p_{n+1} = r_n^3$.

Из соотношения $q_{n+1} \vdots p_n q_n$ получаем, что $q_n \vdots p_k$ при $n > k$. Поскольку q_n взаимно просто с p_n, получаем, что все числа $p_1, p_2, p_3, \ldots$ попарно взаимно просты и больше 1. Поэтому какое-то из них (назовём его p_s) делится на некоторое простое число p, большее всех числителей и знаменателей чисел a, b и c.

Число p не делит ни одно из чисел $p_0, p_1 = r_0^3, \ldots, p_{s-1} = r_{s-2}^3$; также оно не делит числители и знаменатели чисел a, b и c. Из формул $(*)$ получаем теперь, что p не делит также числа $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_s$, а также числители и знаменатели чисел $F_0, F_1, \ldots, F_{s-2}$; поэтому числители и знаменатели чисел x_i, y_i, z_i при $i < s$ также не делятся на p.

Пусть p^t — максимальная степень p, делящая r_{s-1}. Тогда числители чисел $x_s = x_{s-1}F_s$, $y_s = y_{s-1}F_s$ и $z_s = z_{s-1}F_s$ также делятся ровно на p^t. С другой стороны, $p_s \vdots p^{3t}$, так что *знаменатели* чисел x_{s+1}, y_{s+1} и z_{s+1} делятся на p^{2t}. Наконец, при $n > s$ числитель r_n числа F_n делит p_{n+1} и потому взаимно прост с p; значит, знаменатели всех чисел x_i при $i \geqslant s + 1$ делятся на p^{2t}, а значит — нецелые.

Комментарий. Замечено, что все числа домножаются на $F = 1 + \frac{1}{xyz}$ — 1 балл

Введены числа $\Pi_n = x_n y_n z_n = p_n/q_n$ и доказаны формулы, выражающие p_n и q_n через p_{n-1} и q_{n-1} — 1 балл (суммируется с предыдущим).