

## 7 класс

### Теоретический тур

#### Задача №7-Т1. В ванной

Пусть длинная сторона плитки имеет размер  $a$ , а короткая –  $b$ . Поскольку плитку резали только у стены с дверным проёмом, по рисунку можно найти соотношение между  $a$  и  $b$ . На 4 длинных стороны плитки приходится 10 коротких сторон (коврик перед унитазом может закрывать только одну целую плитку, поскольку его ширина равна  $2b$ ). То есть

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Улитка из  $A$  до встречи должна пройти путь  $3a$ , улитка из  $B$  – путь  $(a + 7b)$ . Значит условие встречи можно записать в виде уравнения:

$$\frac{a + 7b}{u} - \frac{3a}{u} = \Delta t.$$

С учетом того, что  $a = 2.5b$ , получаем:

$$b = \frac{u\Delta t}{2} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{200}{60} \text{ см} = 20 \text{ см}. \quad a = 2.5b = 50 \text{ см}.$$

Теперь, зная размеры одной плитки, можно посчитать и площадь всей ванной комнаты, разбив её на простые части (например, на прямоугольники и прямоугольные треугольники с известными сторонами):

$$S = 4a(a + 9b) + 11ab + \frac{5}{2}ab = 4a^2 + 49.5ab = 5.95 \text{ м}^2.$$

PS: Разбиение на площади может быть и другим, соответственно формула может быть другой (например,  $S = 59.5ab$ ). Но ответ, конечно, при этом измениться не должен.

#### Задача №7-Т2. Стадион МФТИ

Эффективная длина круга первой дорожка складывается из двух прямолинейных участков и двух дуг половинок окружностей.

$$L_1 = 2\pi R_1 + 2l \approx 400 \text{ м}.$$

Длины дорожек имеют различия только на криволинейных участках. Для первой и второй дорожек на трёх кругах разность длин:

$$\Delta l_{12} = 3(L_2 - L_1) = 3(2\pi(R_1 + d) - 2\pi R_1) = 6\pi d \approx 23 \text{ м}.$$

Легко заметить, что:

$$\Delta l_{12} = \Delta l_{23} = \Delta l_{34} = 6\pi d \approx 23 \text{ м.}$$

Для расчёта средней скорости на дистанции 2400 м нельзя точно определить время. Например, показание часов 13:00 может соответствовать любому моменту от 13:00:00 до 13:00:59:99... Тогда время забега атлета принадлежит интервалу от 12 до 14 минут. Эти границы позволяют найти наименьшее и наибольшее значения средней скорости.

$$v_{\min} = \frac{2400 \text{ м}}{14 \cdot 60 \text{ с}} \approx 2.86 \text{ м/с}, \quad v_{\min} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{14 \text{ ч}} \approx 10.3 \text{ км/ч};$$

$$v_{\max} = \frac{2400 \text{ м}}{12 \cdot 60 \text{ с}} \approx 3.33 \text{ м/с}; \quad v_{\max} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{12 \text{ ч}} \approx 12 \text{ км/ч.}$$

### Задача №7-Т3. Шоколад и карамель

Запишем формулу средней плотности:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}.$$

Найдём массу шоколада  $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \cdot 0.6V_1$ , объём карамели  $V_2 = \mu_2 t$ , массу карамели  $m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \mu t$ .

После подстановки получим:

$$1.1\rho_1 = \frac{0.6\rho_1 V + \rho_2 \mu t}{0.6V + \mu t}.$$

Выразим и найдём время

$$t = \frac{0.6V \cdot 0.1V}{\mu(\rho_2 - 1.1\rho_1)} = 9.6 \text{ мин.}$$

Проверим возможность ответа:

$$V_2 = \mu t = 0.60 \frac{\text{л}}{\text{мин}} \cdot 9.6 \text{ мин} = 5.76 \text{ л} < 6.4 \text{ л} = 0.4V.$$

Т.е. карамель не выливалась!

### Задача №7-Т4. Догонялки

Введём обозначения:  $T_1$  — всё время в пути первого автомобиля,  $T_2$  — всё время в пути второго автомобиля,  $\tau_2$  — время движения второго автомобиля до остановки. Согласно условию задачи:

$$T_1 = \tau_2 + \Delta t;$$

$$T_2 = t_2 = 14 \text{ мин.}$$

Из графика (точка излома):  $\tau_2 = 2$  мин. В течении этого времени расстояние между автомобилями меняется с относительной скоростью  $(v_1 - v_2)$ . За 2 минуты оно станет равным (из графика)  $S_1 = 1.2$  км. Получаем первое уравнение связи скоростей:

$$S_1 = (v_1 - v_2)\tau_2.$$

После этого из графика видно, что за следующие 2 минуты первый автомобиль уехал от стоящего второго ещё на

$$S_2 = 4.2 \text{ км} - 3.2 \text{ км} = 3 \text{ км.}$$

Это нам позволяет найти скорость первого автомобиля:

$$v_1 = \frac{3 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 1.5 \text{ км/мин.}$$

тогда из уравнения для связи скоростей можно найти скорость второго автомобиля:

$$v_2 = 1.5 \frac{\text{км}}{\text{мин.}} - \frac{1.2 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 0.9 \text{ км/мин.}$$

Теперь запишем формулы для расчёта пути из  $A$  в  $B$ :

$$L = v_1 T_1 = v_1(\tau_2 + \Delta t);$$

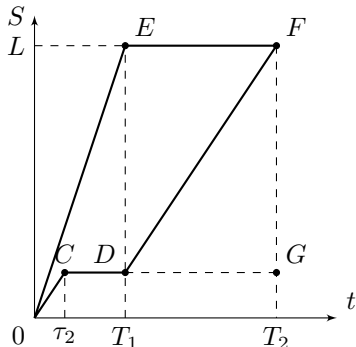
$$L = v_2(T_2 - \Delta t).$$

Приравняем правые части уравнений и найдём время остановки:

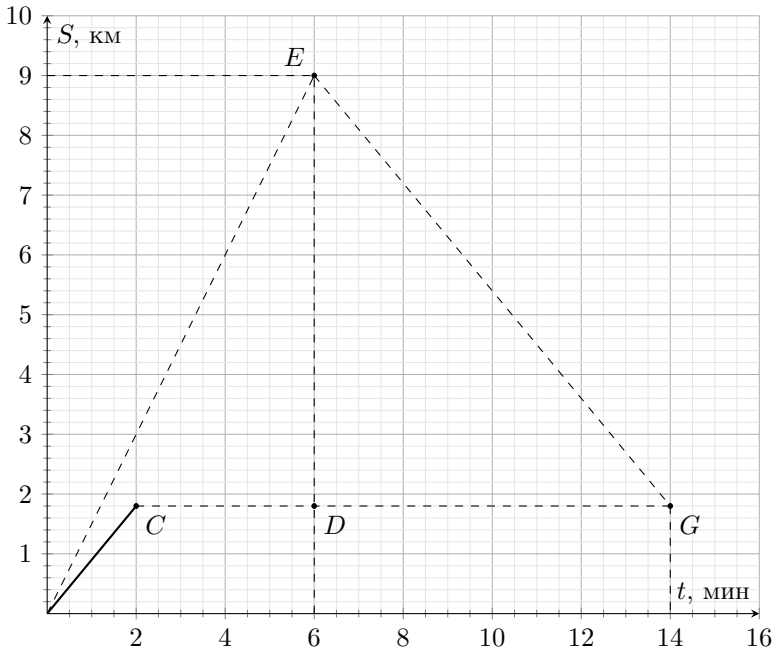
$$\Delta t = \frac{v_2 T_2 - v_1 T_1}{v_1 + v_2} = 4 \text{ мин.}$$

Также  $\Delta t$  можно найти графически. На рисунке качественно показан график движения автомобилей. Рассмотрим построение графика согласно условию задачи.

Известно, что первый автомобиль едет быстрее второго (угловой коэффициент прямой  $OE$  больше, чем у прямой  $OC$ ) с постоянной скоростью  $v_1$  вплоть до пункта  $B$  (точка  $E$ ), а затем останавливается (участок  $EF$ ). Второй автомобиль некоторое время движется с постоянной скоростью  $v_2$  (участок  $OC$ ), останавливается (участок  $CD$ ), и когда первый автомобиль достигает пункта  $B$ , вновь продолжает движение (точка  $D$ ) с той же скоростью  $v_2$  (угловые



коэффициенты прямых  $OC$  и  $DF$  совпадают). В момент времени  $t_2 = 14$  мин. автомобили поравнялись (точка  $F$ ). Зная скорости автомобилей и время движения второго до остановки, можно определить положение точки  $G$  и провести через неё прямую  $GE$  с угловым коэффициентом  $-v_2$  до пересечения с графиком движения первого автомобиля. На рисунке ниже показано это построение. Время остановки второго автомобиля 4 мин легко найти из построения.



Теперь можно найти длину пути:

$$L = v_2(T_2 - \Delta t) = 9 \text{ км.}$$

Если решать с использованием графика, то из построения также легко найти расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  — 9 км.

Шифр

 $\Sigma$ **7-Т1. В ванной**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Высказана идея воспользоваться для расчёта площади плитками, введены обозначения для длины и ширины плитки	1.0		
2	Определено соотношение $a/b$ . Важно! Баллы по этому критерию даются ТОЛЬКО если для его вычисления бралось отношение числа коротких и длинных сторон плиток, приходящихся на ВСЮ ШИРИНУ комнаты ( $10/4$ ), а не посчитанное на глазок в каком-то конкретном месте, например, по площади коврика. То есть, если в решении, например, сказано «по рисунку мы видим, что $a = 2,5b$ », баллы по этому критерию не ставятся, и, в то же время, если сказано «по рисунку мы видим, что $4a = 10b$ », то баллы ставить можно. Если за этот пункт участник получает 0 баллов, но отношение $a/b$ найдено верно, то остальные пункты задачи оцениваются без штрафов.	3.0		
3	Путь улитки, стартовавшей из пункта $A$ , выражен в размерах плитки.	1.0		
4	Путь улитки, стартовавшей из пункта $B$ , выражен в размерах плитки.	1.0		
5	Верно записано уравнение для условия встречи улиток	2.0		
6	Найдена длина стороны плитки $a$	1.0		
7	Найдена длина стороны плитки $b$	1.0		
8	Высказана идея расчёта площади комнаты с помощью разбиения сложной фигуры на более простые, площадь которых легко считается (например, прямоугольники и прямоугольные треугольники).	1.0		
9	Написано уравнение для определения площади комнаты или верно найдено количество простых фигур, через которые определяется площадь комнаты.	1.0		
10	Верно найдена площадь ванной комнаты и указаны единицы измерения в ответе	3.0		

Шифр

 $\Sigma$ **7-Т2. Стадион МФТИ**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записана верная формула для нахождения длины круга первой дорожки	1.0		
1.2	Найдена длина круга	1.0		
2.1	Есть понимание размера радиуса 2 дорожки $R_2 + d$	1.0		
2.2	Найдена разность длин двух соседних дорожек	1.0		
2.3	Показано что значения разностей длин у всех трёх пар дорожек равны	2.0		
3.1	Есть формула средней скорости	1.0		
3.2	Верно определена длина пути на 6 кругах	1.0		
3.3	Верно определено наибольшее время забега	1.0		
3.4	Найдена минимально возможная средняя скорость	1.0		
3.5	Верно выполнен перевод между значениями минимальной скорости для разных единиц измерения	1.0		
3.6	Верно определено наименьшее время забега	1.0		
3.7	Найдена максимально возможная скорость	1.0		
3.8	Верно выполнен перевод между значениями максимальной скорости для разных единиц измерения	1.0		
3.9	Указано, что значение средней скорости любое из интервала	1.0		

Шифр

 $\Sigma$ **7-Т3. Шоколад и карамель**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Записана формула средней плотности	2.0		
2	Записана формула для массы шоколада через объём сосуда или найдена масса шоколада	2.0		
3	Записана формула для объёма карамели через массовый расход и время или найден объём карамели	2.0		
4	Записана формула для массы карамели через массовый расход и время или найдена масса карамели карамели	2.0		
5	Записана формула для расчёта времени (при решении по действиям формулы в работе может не быть, но при отсутствии ошибок в промежуточных вычислениях и верном ответе баллы за этот пункт ставятся)	3.0		
6	Найдено время в минутах. — Если ответ в секундах (576 с), то ставится 1 балл. — Если в ответе нет единиц измерения, то 0 баллов	2.0 1.0 0.0		
7	Проведена проверка возможности ответа	2.0		

Шифр

 $\Sigma$ **7-Т4. Догонялки**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Указано, что излом графика произошёл в момент остановки второго автомобиля	1.0		
1.2	Указано, что коэффициент угла наклона графика на втором участке - скорость второго автомобиля	1.0		
1.3	Указано, что коэффициент угла наклона графика на первом участке - скорость $(v_1 - v_2)$	1.0		
1.4	Найден коэффициент угла наклона графика на первом участке	1.0		
1.5	Найден коэффициент угла наклона графика на втором участке	1.0		
1.6	Найдена скорость $v_1$ (ответ + единицы измерения)	1.0		
1.7	Найдена скорость $v_2$ (ответ + единицы измерения)	1.0		
2.1	<b>Метод 1.</b> Записано уравнение, связывающее время в пути первого автомобиля с его скоростью и $L$ . В работе должно быть обозначено, какие моменты времени обозначают введенные неизвестные переменные.	1.0		
2.2	<b>Метод 1.</b> Записано уравнение, связывающее время в пути второго автомобиля с его скоростью и $L$ . В работе должно быть обозначено, какие моменты времени обозначают введенные неизвестные переменные.	1.0		
2.3	<b>Метод 1.</b> Получено уравнение с одной неизвестной, для нахождения времени, например: $v_2(T_2 - \Delta t) = v_1(\tau_2 + \Delta t)$ . ( $\tau_2 = 2$ мин.; $T_2 = 14$ мин.)	2.0		
2.4	<b>Метод 1.</b> Найдено время остановки второго автомобиля	1.0		
2.5	<b>Метод 1.</b> Верно указаны единицы измерения для времени остановки второго автомобиля	1.0		
2.6°	<b>Метод 2.</b> Есть объяснение к графическому решению	1.0		
2.7°	<b>Метод 2.</b> Выполнено верное построение	2.0		



2.8°	<b>Метод 2.</b> Выбран хороший масштаб, обозначены и подписаны оси, указаны единицы измерения	1.0		
2.9°	<b>Метод 2.</b> Найдено время остановки второго автомобиля	2.0		
3.1	Ответ для $L$	1.0		
3.2	Верно указаны единицы измерения	1.0		

## 8 класс Теоретический тур

### Задача №8-Т1. По трубе

Перейдём в систему отсчёта, связанную с трубой. Скорость левого шарика будет равна  $1.1V$ . С учётом этого находим  $\tau_1 = \frac{L}{1.1V} = \frac{10L}{11V}$ .

Скорость правого шарика в системе отсчёта, связанной с трубой  $1.9V$ . Откуда  $\tau_2 = \frac{L}{1.9V} = \frac{10L}{19V}$ .

После соударения с торцевыми стенками трубы скорости шариков останутся такими же по модулю. К моменту времени  $\tau$  левый шарик пройдет путь  $L + l_1 = 1.1V\tau$ . Путь, пройденный вторым шариком, к этому моменту равен  $L + l_2 = 1.9V\tau$ , причём  $l_1 + l_2 = 2L$ .

Из записанных соотношений определим время  $\tau = \frac{4L}{3V}$ .

Вернёмся в неподвижную систему отсчёта. Скорость левого шарика в ней будет равна  $1.1V + 0.1V = 1.2V$ , скорость правого шарика будет равна  $1.9V - 0.1V = 1.8V$ .

Таким образом  $u_1 = 1.2V$ ,  $u_2 = 1.8V$ .

### Задача №8-Т2. Изогнутая трубка

Согласно условию:  $p_0 = \rho g 10h = 10\rho gh$ . Полное давление в жидкости:  $p = p_{\text{внешнее}} + p_{\text{гидростатическое}}$ . Пройдём по трубке от левой свободной поверхности к правой:

$$0.8p_0 + 4\rho g 2h - \rho g 3h + k\rho g 4h - 3\rho g 3h = p_0.$$

С учётом первого уравнения получаем  $k = 1.5$ .

Т.к. давление на левый свободный уровень увеличится, то он опустится. Значит правый свободный уровень поднимется на ту же величину. Если считать смещение равным  $s$ , то

$$p_0 + 4\rho g(2h - 2s) - \rho g(3h - 2s) + 1.5\rho g 4h - 3\rho g(3h + 2s) = p_0.$$

Отсюда  $s = h/6$ .

### Задача №8-Т3. Туда-сюда

С учётом того, что теплопотери и теплоёмкостью кастрюли можно пренебречь, мощность плитки можно определить как  $N = cm\Delta t/\Delta\tau$ , где  $c$  — удельная теплоёмкость воды,  $m$  — масса воды (объёмом 5 литров,  $m = \rho V = 5 \text{ кг}$ ),  $\Delta t$  — изменение температуры,  $\Delta\tau$  — время, за которое это изменение произошло.

Так как в период с момента времени  $\tau_1$  до момента времени  $\tau_2$  масса воды в кастрюле равна  $m$ , температура изменилась с  $t_1$  до  $t_2$ , то  $N = \frac{cm(t_2 - t_1)}{\tau_2 - \tau_1} = 1.75$  кДж.

Если по ходу нагрева масса воды в кастрюле не меняется, то не меняется скорость нагрева  $\Delta t / \Delta \tau = 5$  °С/мин. Значит конечная температура равна  $t_k = t_0 + 10\tau_0 \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = 70$  °С ( $\tau_0 = 1$  мин).

Пусть масса добавляемой воды в процессе эксперимента  $\Delta m$ . К моменту времени  $8\tau_0$  нагреватель выделит количество теплоты  $N8\tau_0$ . Оно равно сумме количества теплоты  $cm(t_{45} - t_0)$ , полученного водой массой  $m$  (оставшейся в сосуде после выливания) и количества теплоты  $c\Delta m(t_x - t_0)$ , полученного водой массой  $\Delta m$ . Т.е.

$$8N\tau_0 = cm(t_{45} - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0),$$

где  $t_{45} = 45$  °С,  $t_x$  — температура воды в момент её забора. Причём  $t_x < t_{45}$ .

С учётом этого и вышеприведенных уравнений получаем

$$\Delta m = \frac{m}{t_x - t_0} \left( 8\tau_0 \frac{t_2 - t_1}{\tau_2 - \tau_1} - t_{45} + t_0 \right).$$

Из данного соотношения видно, что  $\Delta m$  принимает минимальное значение при максимально возможном значении  $t_x = 45$  °С. Откуда  $m_{\min} = 3$  кг.

Пусть  $\tau$  — время, когда происходил забор воды из кастрюли. Исходя из того, что объём кастрюли 10 л, максимальная масса добавляемой воды может быть равна  $m = 5$  кг.

Тепло, выделившееся на нагревателе к моменту времени  $\tau$ :

$$N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0).$$

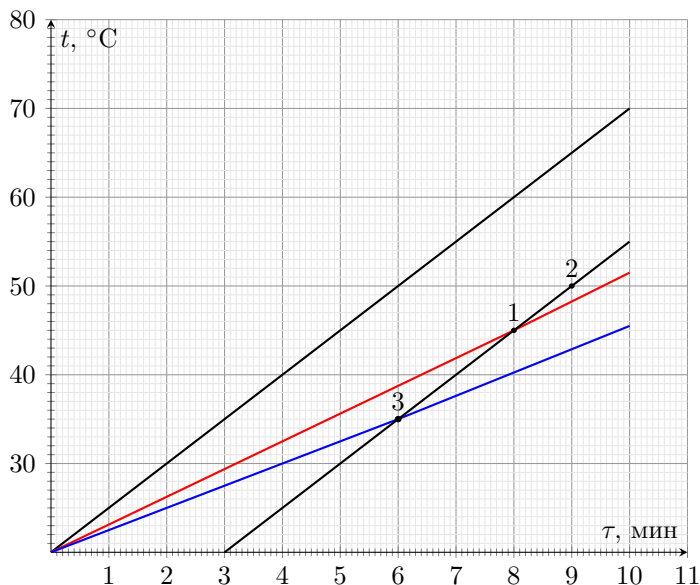
С учётом этого и соотношений для мощности плитки, выделяемой за время  $8\tau_0$  получаем:

$$\tau = \frac{c(m + \Delta m)}{N} \frac{8N\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{c\Delta m} = \left( \frac{m}{\Delta m} + 1 \right) \cdot \frac{8\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{N}.$$

Откуда видно, что  $\tau = \tau_{\min} = 6$  мин. при  $\Delta m = \Delta m_{\max} = m$ .

Также можно решать эту задачу графически в системе координат «время-температура». График процесса нагрева в этих координатах будет состоять из трех отрезков прямых: первый — до долива (масса воды в кастрюле  $m = 5$  кг), второй — после долива (масса воды в кастрюле  $m + \Delta m$ ) и третий — после забора воды (масса воды в кастрюле  $m$ ).

Возьмем известные нам точки 1 и 2 и проведем через них прямую. На этой прямой лежит отрезок графика, соответствующий третьему участку. Учитывая, что масса воды на третьем и первом участке одинакова, прямые, на которых



они лежат, должны быть параллельны, так как мощность нагрева постоянна. Проведем прямую, параллельную нашей и проходящую через начало координат (время — 0 мин, температура — 20 °С). Именно на этой прямой лежит график первого участка. По ней также можно определить температуру  $t_k$ , которую имела бы вода в кастрюле, если бы её масса не менялась со временем. Температура, соответствующая 10 минутам и есть искомая  $t_k = 70$  °С.

По наклону этой прямой можно также определить мощность плитки  $N = \frac{cm\Delta t}{\Delta\tau} = 1.75$  кВт.

Когда в кастрюлю доливают воду, масса в ней увеличивается, а температура уменьшается. Поскольку изменение температуры происходит мгновенно, график перескакивает на прямую, имеющую наклон, соответствующий новой массе, и проходящую через начало координат. Чем масса больше, тем более полого пойдет прямая. А её пересечение с прямой третьего участка даст момент забора воды.

Поскольку кастрюля десятилитровая, больше 5 литров долить в неё невозможно. Этому случаю соответствует нижняя (голубая) прямая. Именно она пересекается с прямой третьего участка раньше любой другой возможной (в точке 3, соответствующей  $\tau_{\min} = 6$  минут).

В то же время, второй участок не может пересечься с третьим позже точки 1, которой соответствует минимальная добавочная масса  $m_{\min} = 3$  кг.

### Задача №8-Т4. Ползущий рельс

Для начала определимся с тем, как будут меняться во времени силы реакции опор (которые численно равны показаниям динамометров). Очевидно, что центр масс рельса на старте находится между опорами. Пусть  $x$  — это расстояние от левой опоры до центра масс в начальный момент времени,  $F_1$  и  $F_2$  — показания левого и правого динамометров соответственно. Тогда через время  $t$  получим:

$$F_1 l = Mg(l - x - vt);$$

$$F_2 l = Mg(x + vt).$$

Откуда:

$$F_1(t) = Mg - \frac{Mgx}{l} - \frac{Mgv}{l}t;$$

$$F_2(t) = \frac{Mgx}{l} + \frac{Mgv}{l}t.$$

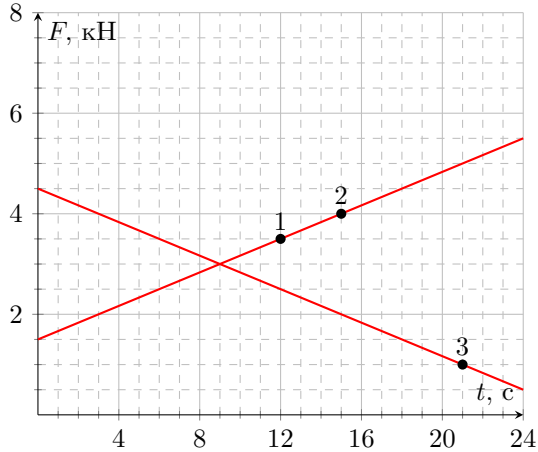
Видно, что в обоих случаях зависимость линейная. В первом — убывающая, а во втором — возрастающая, причем коэффициенты при  $t$  отличаются только знаком. Кроме того, в любой момент времени  $F_1 + F_2 = Mg$ .

Очевидно, что из трех точек какие-то 2 принадлежат одному графику, а оставшаяся — другому. Возможны три варианта. Однако точки 2 и 3, также как точки 1 и 3 не могут лежать на одной прямой. В этом случае второй график пересечет ось  $X$  позже, чем начнется движение (а такого быть не может — рельс бы опрокинулся еще до старта).

Покажем это аналитически. Предположим, что точки 2 и 3 принадлежат одному графику  $F_1(t)$ . Тогда уравнение прямой  $F_1(t) = -0.5 \frac{H}{c}t + 11,5$  Н. В момент времени  $t_1 = 12$  с из графика находим  $F_2(t_1) = 3,5$  Н, и, с учётом полученного уравнения прямой,  $F_1(t_1) = 5,5$  Н. В момент времени  $t_0 = 0$  с находим  $F_1(t_0) = 11,5$  Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется,  $F_2(t_0) = -2,5$  Н  $< 0$ . Значит, наше предположение неверно.

Предположим теперь, что точки 1 и 3 принадлежат одному графику  $F_1(t)$ . Тогда уравнение прямой  $F_1(t) = -\frac{5}{18} \frac{H}{c}t + \frac{41}{6}$  Н. В момент времени  $t_2 = 15$  с из графика находим  $F_2(t_2) = 4$  Н, и, с учётом полученного уравнения прямой,  $F_1(t_2) = \frac{8}{3}$  Н  $\approx 2,67$  Н. В момент времени  $t_0 = 0$  с находим  $F_1(t_0) \frac{41}{6}$  Н  $\approx 6,83$  Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется,  $F_2(t_0) = -\frac{1}{6}$  Н  $\approx -0,17$  Н  $< 0$ . Следовательно, это предположение тоже неверно.

Значит, одному графику принадлежат точки 1 и 2. Тогда графики должны выглядеть так:



Сразу оговоримся, что поведение графиков нам точно известно только до 21-й секунды. Время движения рельса будет зависеть от его длины.

По графикам не сложно определить, что  $Mg = 6$  кН. Откуда  $M = 600$  кг. Если мысленно продлить графики до пересечения с осью  $X$ , то можно заметить, что расстояние  $l$  рельс проехал бы за 36 секунд. Значит его скорость —  $0.25$  м/с.

Что же касается минимальной длины рельса, то при её оценке мы можем отталкиваться только от известных нам крайних положений. В начальный момент времени расстояние от центра масс до дальней (правой) опоры —  $6.75$  м. А в последний доподлинно известный нам момент (точка 3) расстояние от центра масс до дальней (левой) опоры —  $7.5$  м. Откуда можно сделать вывод, что длина рельса не меньше  $L_{\min} = 15$  м.

Шифр

 $\Sigma$ **8-Т1. По трубе**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Определена начальная скорость левого шарика относительно трубы $1,1V$ .	1.0		
1.2	Определено время $\tau_1 = \frac{10L}{11V}$ .	1.0		
2.1	Определена начальная скорость правого шарика относительно трубы $1,9V$ .	1.0		
2.2	Определено время $\tau_2 = \frac{10L}{19V}$ .	1.0		
3.1	Записано уравнение, равносильное уравнению $L + l_1 = 1.1V\tau$ .	2.0		
3.2	Записано уравнение, равносильное уравнению $L + l_2 = 1.9V\tau$ .	2.0		
3.3	Записано уравнение, равносильное уравнению $l_1 + l_2 = 2L$ .	2.0		
3.4	Найдено время $\tau = \frac{4L}{3V}$ . Ответ без приведённого правильного решения не засчитывается.	1.0		
4.1	Найдена скорость $u_1 = 1,2V$ .	2.0		
4.2	Найдена скорость $u_2 = 1,8V$ .	2.0		

Шифр

 $\Sigma$ **8-Т2. Изогнутая трубка**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записана величина атмосферного давления через плотность жидкости $p_0 = 10\rho gh$	1.0		
1.2	Учтено, что гидростатическое давление в жидкости суммируется с внешним	2.0		
1.3	Записано верное равенство давлений, обеспечивающее равновесие в трубке при наличии пробки	3.0		
1.4	Найдено значение $x = 1.5$	2.0		
2.1	Обосновано направление смещения жидкостей	1.0		
2.2	Указано верное направление смещения	1.0		
2.3	Записано верное равенство давлений, обеспечивающее равновесие в трубке без пробки	3.0		
2.4	Найдена величина смещения $s = h/6$	2.0		



Шифр

 $\Sigma$ 

## 8-ТЗ. Туда-сюда

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	<b>Метод 1.</b> Указано, что если масса воды не изменяется, то скорость нагрева равна $\Delta t/\Delta \tau = 5^\circ\text{C}/\text{мин}$ .	1.0		
1.2	<b>Метод 1.</b> Записано соотношение для определения конечной температуры $t_{\text{к}} = t_0 + 10\tau_0 \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$ .	1.0		
1.3°	<b>Метод 2.</b> Высказана идея графического похода к решению задачи.	2.0		
1.4°	<b>Метод 2.</b> Правильно выбраны оси, нанесены точки 1 и 2, соблюдены требования к оформлению графиков.	3.0		
1.5	Определена конечная температура $t_{\text{к}} = 70^\circ\text{C}$ .	2.0		
2.1	<b>Метод 1.</b> Записано выражение для мощности $N = \frac{cm(t_2 - t_1)}{\tau_2 - \tau_1}$ .	1.0		
2.2	<b>Метод 1.</b> Записано соотношение $8N\tau_0 = cm(t_{45} - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0)$ .	2.0		
2.3	<b>Метод 1.</b> Указано, что $\Delta m = m_{\text{min}}$ при $t_x = 45^\circ\text{C}$	1.0		
2.4	<b>Метод 1.</b> Найдено значение $m_{\text{min}}$ .	2.0		
2.5°	<b>Метод 2.</b> Обосновано поведение графика на втором участке, явно указано, что он будет лежать на прямой, проходящей через точку (0 мин.; $20^\circ\text{C}$ ).	2.0		
2.6°	<b>Метод 2.</b> Найдено значение $m_{\text{min}}$ .	3.0		
3.1	<b>Метод 1.</b> $N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0)$ .	2.0		
3.2	<b>Метод 1.</b> Учтено, что $m_{\text{max}} = m = 5$ кг.	1.0		
3.3	<b>Метод 1.</b> Найдено значение $\tau_{\text{min}}$ .	2.0		
3.4°	<b>Метод 2.</b> Найдено значение $\tau_{\text{min}}$ .	3.0		

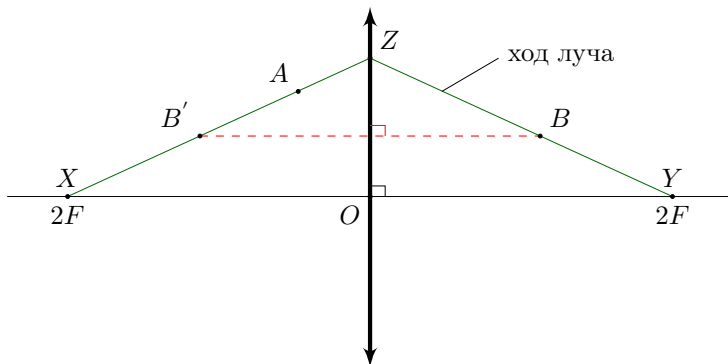
Шифр

 $\Sigma$ **8-Т4. Ползущий рельс**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Верно записано уравнение моментов относительно оси, проходящей через левую опору (или эквивалентное уравнение)	2.0		
1.2	Верно записано уравнение моментов относительно оси, проходящей через правую опору (или эквивалентное уравнение)	2.0		
1.3	Получено выражение зависимости показаний левого динамометра от времени	1.0		
1.4	Получено выражение зависимости показаний правого динамометра от времени	1.0		
1.5	Обосновано, что одному графику не могут принадлежать точки 1 – 3 и 2 – 3	1.0		
1.6	Указано, что одному графику не могут принадлежать точки 1 – 3 и 2 – 3	1.0		
1.7	Верно построены все графики	1.0		
1.8	Определена масса $M$	1.0		
2.1	Определена скорость $v$	2.0		
3.1	Определены расстояния от центра масс до дальней опоры в начальный и последний доподлинно известный момент времени	1.0		
3.2	Указано, что в момент, соответствующий точке 3, центр масс рельса максимально удален от опоры	1.0		
3.3	Определено значение $L_{min}$	1.0		

## 9 класс

### Задача №9-Т1. Выцветшие фокусы линзы



Из рисунка видно, что линза собирающая, тогда по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F} + \frac{1}{r},$$

где  $r$  — расстояние от изображения источника, которое находится тоже на главной оптической оси, до линзы.

Находим  $r = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{2F}\right)^{-1} = 2F > 0$ . Т.е. изображение находится на другой стороне от линзы на расстоянии  $2F$  от неё — на том же расстоянии, что и источник.

Если  $X$  — источник, то  $Y$  — изображение источника. Если  $Y$  — источник, то  $X$  — его изображение.

$OX = OY \Rightarrow \triangle XYZ$  равнобедренный  $\Rightarrow$  точка  $B'$ , симметричная  $B$  относительно плоскости линзы, лежит на другой стороне  $\triangle XYZ$  — стороне  $XZ$ .

Следовательно, следующий ряд построений отвечает на вопросы задачи:

1. Отражаем точку  $B$  относительно плоскости линзы и получаем точку  $B'$  (альтернативно можно так же поступить и с точкой  $A$ ).
2. Проводим прямую  $AB'$ . Она пересекает главную оптическую ось в точке  $X$ . Получаем положение источника (или изображения)  $X$  на двойном фокусе.
3. Середина отрезка  $OX$  — первый фокус линзы.
4. Отражаем в плоскости линзы фокус, построенный в пункте 3 и получаем второй фокус.

### Задача №9-Т2. Частицы в трубах

При движении от точки  $C$  до точки  $D$  между двумя встречами частица в кольцевой трубе совершает  $N + \frac{1}{2}$  оборотов, где  $N \geq 0$  — целое число. Это произошло за время

$$\Delta t = \frac{2\pi R(N + \frac{1}{2})}{v} = \frac{\pi R(2N + 1)}{v}.$$

Пусть  $x(t)$  — расстояние от первой частицы до точки  $A$  в момент времени  $t$ , где  $x(0) = 0$ . Тогда  $x(t) = \frac{at^2}{2}$  и  $t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$ . Длины отрезков  $|AC| = \frac{L}{2} - R$  и  $|AD| = \frac{L}{2} + R$ . Время движения частицы №1 от точки  $C$  до точки  $D$  равно

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} \left( \sqrt{|AD|} - \sqrt{|AC|} \right) = \frac{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}}{\sqrt{a}}$$

Получаем

$$\frac{\pi R(2N + 1)}{v} = \frac{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}}{\sqrt{a}}.$$

Откуда

$$v = \frac{\pi R(2N + 1)\sqrt{a}}{\sqrt{L + 2R} - \sqrt{L - 2R}} = \frac{\pi(2N + 1)(\sqrt{L + 2R} + \sqrt{L - 2R})\sqrt{a}}{4}$$

При  $R = L/2$  имеем

$$v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}(2N + 1)\sqrt{a}$$

При  $R \ll L$  получаем

$$v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}(2N + 1)\sqrt{a}$$

### Задача №9-Т3. Гидростатический реостат

Перемещаясь, поршни задействуют разную длину проволок, соответственно, обеспечивают изменение сопротивления цепи. Это связано еще и с тем, что площади сосудов отличаются, иначе бы эффект не наблюдался. Дело в том, что при смещении большого поршня на  $\Delta h$  вниз, малый сместится на  $3\Delta h$  вверх, и наоборот, когда большой поршень смещается на  $\Delta h$  вверх, малый сместится на  $3\Delta h$  вниз.

Для удобства дальнейшей записи введем обозначение  $\alpha$  для сопротивления одного метра проволоки. Тогда можно записать законы Ома для указанных в условии задачи положений поршней. Когда на поршнях нет грузов:

$$U = I_0(2\alpha h_0 + R_A),$$

когда груз на малом поршне:

$$U = I_1(2\alpha h_0 + R_A - \frac{\alpha m}{2\rho S}),$$

когда груз на большом поршне:

$$U = I_2(2\alpha h_0 + R_A + \frac{\alpha m}{2\rho S}).$$

Взяв разность двух последних уравнений, получаем

$$U(I_2 - I_1) = I_1 I_2 \frac{\alpha m}{\rho S}.$$

Откуда

$$\alpha = \frac{U(I_2 - I_1)\rho S}{I_1 I_2 m} = 20 \text{ Ом/м.}$$

И, воспользовавшись первым законом Ома, получим ответ

$$R_A = \frac{U}{I_0 - 2\alpha H_0} = 1 \text{ Ом}$$

Из законов Ома для положений системы с грузами можно получить

$$U(I_1 + I_2) = 2I_1 I_2(2\alpha h_0 + R_A).$$

Учитывая закон Ома, когда нет поршней, получим

$$I_0 = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 2.2 \text{ А}$$

Максимальный ток в цепи будет при минимальном сопротивлении, то есть, когда задействована минимальная длина проволок. Это произойдет в нижнем положении малого поршня:

$$I_{\max} = \frac{U}{\frac{4}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 3.22 \text{ А.}$$

Минимальный ток напротив будет при максимальном сопротивлении, то есть, когда задействована наибольшая длина проволок. Это произойдет в верхнем положении малого поршня:

$$I_{\min} = \frac{U}{\frac{8}{3}\alpha h_0 + R_A} \approx 1.67 \text{ А.}$$

### Задача №9-Т4. Что так, что эдак

Ситуация, описанная в задаче, может произойти только при условии, что отлив воды в экспериментах происходит при одинаковой температуре. Действительно, при отливе вода забирает с собой часть тепла, переданного плиткой, равную  $c\Delta m(t_x - t_0)$ , где  $t_x$  — это температура, при которой воду выливают из кастрюли. А поскольку общее количество теплоты, переданное воде плиткой, в обоих случаях одинаково, то и  $t_x$  должно быть одинаковым. Найдем температуру, при которой происходит отлив воды во втором эксперименте:

$$t_x = t_0 + \frac{P\tau_1}{cM} = 40 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Здесь и далее  $M$  — это масса воды в кастрюле в начале эксперимента (5 кг). Эту же температуру должна иметь вода в первом эксперименте через время  $\tau_1 + \tau_2$  после его начала. Отсюда:

$$t_x = t_0 + \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(M + \Delta m)}.$$

Откуда

$$\Delta m = \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(t_x - t_0)} - M = 3 \text{ кг}.$$

Тогда конечная температура в каждом из экспериментов:

$$t_{\text{к}} = t_0 + \frac{P\tau - c\Delta m(t_x - t_0)}{cM} = 48 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Причем, для первого случая эта температура одновременно является максимально возможной по ходу всего эксперимента (поскольку она больше  $t_x$ ). Во втором случае максимального значения температура может достигать либо в конце эксперимента, либо непосредственно перед доливом воды (через  $\tau_1 + \tau_2$  от начала нагрева). При проверке выясняется, что реализовался второй сценарий:

$$t_{\text{max}2} = t_x + \frac{P\tau_2}{c(M - \Delta m)} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$$

**Задача №9-Т5. Движение по спице**

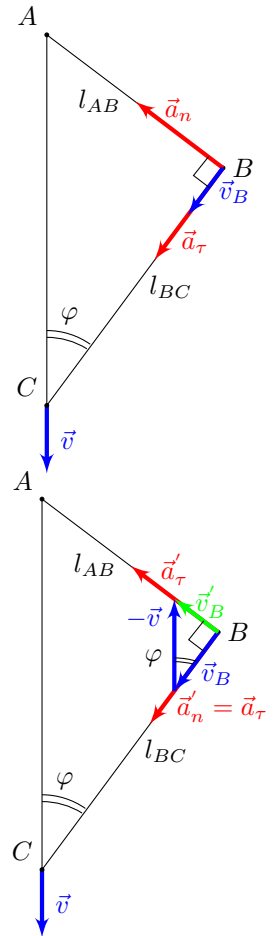
Так как точка  $A$  закреплена, а нить  $AB$  натянута, то точка  $B$  движется по окружности с центром в точке  $A$  и радиусом  $l_{AB}$ . Следовательно, её скорость в рассматриваемый момент перпендикулярна радиусу окружности, то есть нити  $AB$ , и поэтому направлена вдоль нити  $BC$ , перпендикулярной нити  $AB$ . Найти скорость точки  $B$  можно двумя способами.

Первый способ: поскольку нить  $BC$  нерастяжима и натянута, то проекции скоростей точек  $B$  и  $C$  на неё равны. Проекция скорости точки  $C$  на нить  $BC$  равна  $v \cos \varphi$ , так что  $v_B = v \cos \varphi$ .

Второй способ: перейдем в систему отсчета точки  $C$ , то есть в поступательно движущуюся систему отсчёта, в которой точка  $C$  покоится. Скорости  $\vec{v}_B$  и  $\vec{v}'_B$  точки  $B$  в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением  $\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}_C$ , где  $\vec{v}_C$  — скорость точки  $C$  в исходной системе отсчёта. В новой системе отсчёта точка  $C$  покоится, нить  $BC$  натянута, так что точка  $B$  движется по окружности с центром в точке  $C$  и радиусом  $l_{BC}$ . При этом скорость точки  $B$  в новой системе отсчёта направлена перпендикулярно радиусу окружности — нити  $BC$ . Значит, скорости  $\vec{v}_B$ ,  $-\vec{v}$  и  $\vec{v}_B - \vec{v} = \vec{v}'_B$  образуют прямоугольный треугольник с углом  $\varphi$  между  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_B$ , в котором  $\vec{v}$  является гипотенузой. В таком случае  $v_B = v \cos \varphi$ .

$$v_B = v \cos \varphi = \frac{v\sqrt{3}}{2}$$

Теперь определим длину нити  $BC$ . Для этого перейдём в систему отсчёта точки  $C$ , в точности как в Варианте 2 в предыдущем пункте. Поскольку новая система отсчёта поступательно движется относительно исходной, то ускорения  $\vec{a}_B$  и  $\vec{a}'_B$  точки  $B$  в исходной и новой системах отсчёта соответственно связаны соотношением  $\vec{a}_B = \vec{a}'_B + \vec{a}_C$ , где  $\vec{a}_C$  — ускорение точки  $C$  в исходной системе отсчёта. Так как точка  $B$  движется по окружности с центром в точке  $C$  в новой системе отсчёта, то её ускорение складывается из тангенциального ускорения  $\vec{a}'_T$ , направленного вдоль нити  $AB$ , и ортогонального ему нормального ускорения  $\vec{a}'_n$ , направленного к точке  $C$  вдоль нити  $BC$ . По условию в исходный момент  $\vec{a}_C = 0$ , так что  $\vec{a}_B = \vec{a}'_B$ . Также дано, что ускорение точки  $B$ , направленное вдоль нити  $BC$ , равно  $a_T$ . Значит, нормальное ускорение точки  $B$  в новой системе отсчёта равно  $a_T$ . С другой стороны,



оно равно

$$\frac{(v'_B)^2}{l_{BC}} = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}},$$

где равенство  $v'_B = v \sin \varphi$  получается из геометрии прямоугольного треугольника, образованного скоростями  $\vec{v}_B$ ,  $-\vec{v}$  и  $\vec{v}'_B$ . Таким образом,

$$a_\tau = \frac{(v \sin \varphi)^2}{l_{BC}} \implies l_{BC} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{a_\tau}.$$

$$l_{BC} = \frac{v^2 \sin^2 \varphi}{a_\tau} = \frac{v^2}{4a_\tau}$$

Определим полное ускорение точки  $B$  в исходной системе отсчёта. Поскольку в исходной системе отсчёта точка  $B$  движется по окружности с центром в точке  $A$ , то её полное ускорение складывается из двух ортогональных составляющих: тангенциального ускорения  $a_\tau$  и нормального ускорения, направленного вдоль нити  $AB$  к точке  $A$  и равного

$$a_n = \frac{v_B^2}{l_{AB}} = \frac{v^2 \cos^2 \varphi}{l_{BC} \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{a_\tau \cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi} = a_\tau \operatorname{ctg}^3 \varphi.$$

Равенство  $l_{AB} = l_{BC} \cdot \operatorname{tg} \varphi$  получается из геометрии прямоугольного треугольника  $ABC$ . Полное ускорение точки  $B$  находим по теореме Пифагора

$$a_B = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = a_\tau \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^6 \varphi} = 2\sqrt{7}a_\tau.$$



Шифр

 $\Sigma$ **9-Т1. Выцветшие фокусы линзы**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Утверждение, что изображение также лежит на расстоянии двойного фокуса, в том числе использование формулы тонкой линзы или без доказательства.	3.0		
2	Утверждение, что луч распространяется симметрично плоскости линзы.	2.0		
3	Отражение точки $A$ или точки $B$ относительно главной плоскости линзы в точки $A'$ или в $B'$ соответственно.	2.0		
4	Построение хода луча $B'A$ или $A'B$ до пересечения с главной оптической осью и (но не обязательно) линзой.	2.0		
5	Утверждение, что точка пересечения построенного луча и главной оптической оси является изображением (или источником), находящимся на расстоянии двойного фокуса.	1.0		
6	Нахождение фокуса, как середины между точкой $O$ и изображением или источником.	1.0		
7	Нахождение второго фокуса.	1.0		

Шифр

 $\Sigma$ **9-Т2. Частицы в трубах**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записано условие одинаковости времени движения обеих частиц от $C$ до $D$ .	1.0		
1.2	Выражены расстояния $AC$ и $AD$ через $L$ и $R$ .	1.0		
1.3	Верно выписано время движения частицы между встречами по прямой трубе.	1.0		
1.4	Найдено время движения частицы между встречами по кольцевой трубе.	2.0		
1.5	Верно найдена скорость частицы в общем виде	3.0		
	$v = \frac{\pi(2N + 1)(\sqrt{L + 2R} + \sqrt{L - 2R})\sqrt{a}}{4}$ <p>– Верно найдена скорость частицы в частном случае (без <math>N</math>)</p> $v = \frac{\pi(\sqrt{L + 2R} + \sqrt{L - 2R})\sqrt{a}}{4}$	2.0		
2.1	Верно найдена скорость частицы при $R = L/2$	2.0		
	$v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}(2N + 1)\sqrt{a}$ <p>– Верно найдена скорость частицы при <math>R = L/2</math> в частном случае (без <math>N</math>)</p> $v_1 = \frac{\pi\sqrt{2L}}{4}\sqrt{a}$	1.0		
3.1	Верно найдена скорость частицы при $R \ll L$	2.0		
	$v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}(2N + 1)\sqrt{a}$ <p>– Верно найдена скорость частицы при <math>R \ll L</math> в частном случае (без <math>N</math>)</p> $v_2 = \frac{\pi\sqrt{L}}{2}\sqrt{a}$	1.0		

Шифр

 $\Sigma$ **9-Т3. Гидростатический реостат**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Продемонстрировано понимание, что описанный эффект связан с изменением сопротивления задействованной части проволоки. Например, вводится понятие «сопротивление единицы длины» $\alpha$ , различные отношения сопротивлений проволоки при разных положениях поршней или эквивалентные рассуждения.	1.0		
1.2	Определена связь между смещениями поршней 1:3.	1.0		
1.3	Определено изменение задействованной длины проволоки при помещении груза на малый поршень: $-\frac{\alpha m}{2\rho S}$	0.5		
1.4	Определено изменение задействованной длины проволоки при помещении груза на малый поршень: $+\frac{\alpha m}{2\rho S}$	0.5		
1.5	Закон Ома для случая, когда грузов нет $U = I_0(2\alpha h_0 + R_A)$	1.0		
1.6	Закон Ома для случая, когда груз на малом поршне $U = I_1(2\alpha h_0 + R_A - \frac{\alpha m}{2\rho S})$	1.0		
1.7	Закон Ома для случая, когда груз на большом поршне $U = I_1(2\alpha h_0 + R_A + \frac{\alpha m}{2\rho S})$	1.0		
1.8	Определено сопротивление амперметра $R_A = \frac{U_0}{I_0} - 2\alpha h_0 = 1 \text{ Ом}$	1.0		
2.1	Определен ток $I_0 = \frac{2I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 2.2 \text{ А}$	1.0		
3.1	Формула для определения $I_{\max} = \frac{U}{\frac{4}{3}\alpha h_0 + R_A}$	1.0		
3.2	Численное значение: $I_{\max} = 3.22 \text{ А}$	1.0		
3.3	Формула для определения $I_{\min} = \frac{U}{\frac{8}{3}\alpha h_0 + R_A}$	1.0		
3.4	Численное значение: $I_{\min} = 1.67 \text{ А}$	1.0		

Шифр

 $\Sigma$ **9-Т4. Нагревание воды в кастрюле**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Аргументировано показано, что указанная ситуация возможна только когда отлив воды происходит при одинаковой температуре.	3.0		
1.2	Записано выражение для нахождения $t_x$ в первом эксперименте $t_x = t_0 + \frac{P\tau_1}{cM} = 40 \text{ }^\circ\text{C}$	1.0		
1.3	Записано выражение для нахождения $t_x$ во втором эксперименте: $t_x = t_0 + \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(M + \Delta m)}$	1.0		
1.4	Верное аналитическое выражение $\Delta m = \frac{P(\tau_1 + \tau_2)}{c(t_x - t_0)} - M$	1.0		
1.5	Верное численное значение $\Delta m = 3 \text{ кг}$	1.0		
2.1	Записано уравнение, для нахождения $t_k = t_0 + \frac{P\tau - c\Delta m(t_x - t_0)}{cM}$	1.0		
2.2	Верное численное значение $t_k = 48 \text{ }^\circ\text{C}$	1.0		
3.1	Указано, что в процессе второго эксперимента температура может достичь большего значения, чем конечная.	1.0		
3.2	Записано уравнение, для нахождения максимального значения температуры $t_{\max 2} = t_x + \frac{P\tau_2}{c(M - \Delta m)}$	1.0		
3.3	Верное численное значение максимальной температуры $t_{\max} = 70 \text{ }^\circ\text{C}$	1.0		

Шифр

 $\Sigma$ **9-Т5. Движение по спице**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Верно определено направления движения точки $B$ — скорость направлена вдоль нити $BC$ .	1.0		
1.2	Использование кинематической связи для нахождения скорости точки $B$ : $v \cos \varphi = v_B$ .	2.0		
1.3	Ответ: $v_B = \frac{\sqrt{3}}{2}v$	1.0		
2.1	Связь проекций ускорения точки $C$ и точки $B$ на сонаправленную с нитью $BC$ ось: $(a_B)_{BC} - (a_C)_{BC} = \frac{(v'_B)^2}{l_{BC}}$ .	3.0		
2.2	Найдена скорость точки $B$ в новой системе отсчёта: $v'_B = v \sin \varphi$ .	1.0		
2.3	Найдена длина нити $l_{BC} = \frac{v^2}{4a_\tau}$ (для получения балла, численное значение тригонометрических функций должно быть подставлено).	1.0		
3.1	Найдена длина нити $l_{AB} = l_{BC} \operatorname{tg} \varphi = \frac{v^2 \sin^3 \varphi}{a_\tau \cos \varphi}$ .	1.0		
3.2	Найдена проекция ускорения точки $B$ на ось вдоль нити $AB$ : $a_n = \frac{v_B^2}{l_{AB}} = \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi} a_\tau$ .	1.0		
3.3	Найдено полное ускорение точки $B$ : $a_B = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^6 \varphi} \cdot a_\tau = 2\sqrt{7}a_\tau$ (для получения балла, численное значение тригонометрических функций должно быть подставлено).	1.0		

## 10 класс Теоретический тур

### Задача №10-Т1. Зонд

Температура падает с высотой со скоростью  $k = 8$  К/км. На высоте  $h_1 = 4$  км, следовательно, температура равна  $T_1 = 268$  К, а давление (по графику)  $p_1 \approx 62$  кПа. Плотность воздуха на этой высоте равна

$$\rho_{в1} = \frac{p_1 M_B}{RT_1}.$$

Масса гелия в шаре  $m_r$  в процессе подъёма не меняется, поэтому

$$m_r = \frac{p_0 M_r V}{RT_0}.$$

Запишем условие равновесия зонда на заданной высоте:

$$\rho_{в1} g V = (m_r + m_0 + m_d) g$$

Откуда

$$m_d = \rho_{в1} V - m_r - m_0 = \frac{p_1 M_B V}{RT_1} - \frac{p_0 M_r V}{RT_0} - m_0 = 4.9 \text{ кг.}$$

Без датчиков шар будет подниматься, пока не станет справедливым новое условие равновесия

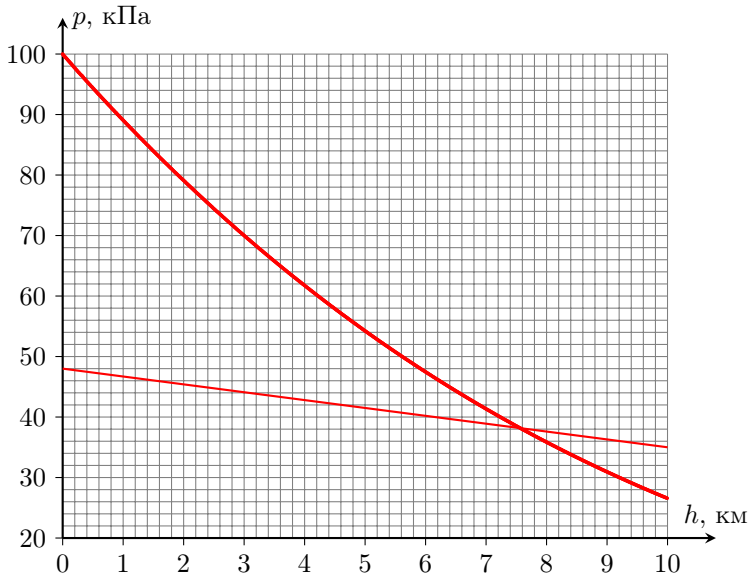
$$\rho_{в} g V = (m_r + m_0) g.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{p(h) M_B}{RT(h)} = \frac{m_r + m_0}{V} \Rightarrow p(h) = \frac{(m_r + m_0) R}{M_B V} \cdot (T_0 - kh) \approx 48 \text{ кПа} - 1.3 \frac{\text{кПа}}{\text{км}} \cdot h.$$

Для нахождения высоты построим поперек графика зависимости  $p(h)$  прямую, соответствующую полученному уравнению, и найдем, что максимальная высота равна примерно 7.6 км.

*Примечание:* на графике (толстая линия) изображена функция  $p(h) = p_0 \left(1 - \frac{kh}{T_0}\right)^{\frac{M_B g}{\kappa R}}$ , задающая распределение давления по высоте при зависимости температуры  $T(h) = T_0 - kh$ .



### Задача №10-Т2. Наклонная плоскость

Так как стержень жесткий и изначальная скорость сообщена вдоль наклонной плоскости, то тело будет двигаться по окружности радиуса  $L$ .

При движении на груз действуют четыре силы: потенциальная сила тяжести и непотенциальные силы трения и реакции опоры со стороны стержня и плоскости. Сила реакции со стороны стержня, как и сила реакции со стороны плоскости, в любой момент времени направлены перпендикулярно скорости, поэтому их работа равна нулю. Сила трения постоянна по модулю и в любой момент направлена против скорости, поэтому работа силы трения будет равна  $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}S$ , где  $S$  — длина пути, пройденного телом. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную плоскости:  $N - mg \cos \alpha = 0$ . Так как тело скользит, то на него действует сила трения скольжения, равная  $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ . Пусть скорость груза в верхней точке равна 0. Запишем связь между изменением механической энергии тела и работой силы трения:

$$(mg \cdot 2L \sin \alpha - 0) + \left(0 - \frac{mv_1^2}{2}\right) = -\mu mg \cos \alpha \cdot \pi L.$$

Скорость  $v_1$  будет равна

$$v_1 = \sqrt{gL(4 \sin \alpha + 2\mu\pi \cos \alpha)} = \sqrt{(4 + \pi)gL \sin \alpha} \approx \sqrt{7.14 gL \sin \alpha}.$$

Рассмотрим в произвольный момент времени проекции сил, действующих на груз, на ось, сонаправленную скорости. Не нулевыми на эту ось будут только проекции силы тяжести и силы трения. Пока груз движется от нижней точки к самой верхней, обе проекции будут отрицательными, значит модуль скорости груза будет уменьшаться. В процессе дальнейшего движения проекция силы тяжести станет положительной и будет постепенно возрастать от нулевого значения, значит скорость тела первое время продолжит уменьшаться и достигнет минимума в точке, когда проекция силы тяжести скомпенсирует проекцию силы трения:

$$mg \sin \alpha \sin \beta - \mu mg \cos \alpha = 0$$

(здесь  $\beta$  – угол между стержнем и «вертикалью», то есть прямой, проходящей через верхнюю точку траектории груза и шарнир). Отсюда получим, что

$$\sin \beta = \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}.$$

Так как работа силы трения и изменение потенциальной энергии при перемещении в фиксированное положение не зависят от величины начальной скорости, то минимальному значению скорости на старте соответствует нулевое значение минимальной скорости в процессе дальнейшего движения. Запишем опять связь между изменением механической энергии тела и работой силы трения:

$$(mg \cdot L \sin \alpha \cdot (1 + \cos \beta) - 0) + \left(0 - \frac{mv_2^2}{2}\right) = -\mu mg \cos \alpha \cdot (\pi + \beta)L.$$

Тогда

$$v_2^2 = 2gL \sin \alpha \cdot (1 + \cos \beta) + 2\mu g \cos \alpha (\pi + \beta)L = gL \sin \alpha \left(2 + \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}\right)$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{3} + 7\pi/6)gL \sin \alpha} \approx \sqrt{7.40 gL \sin \alpha}$$

### Задача №10-Т3. Волчок

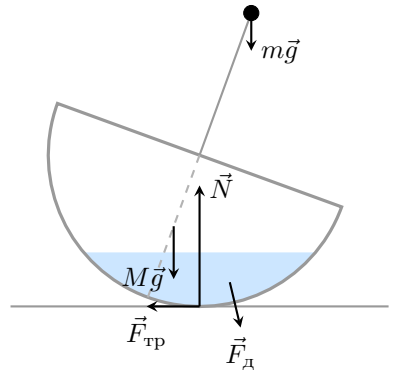
Определим координату центра масс полусферы. Мысленно «разрежем» полусферу плоскостями, параллельными основанию, на тонкие кольца толщиной  $h$  каждое. Масса такого кольца пропорциональна площади его поверхности. Пусть кольцо видно из центра полусферы под углом  $\varphi$  к ее основанию. Тогда радиус кольца равен  $r = R \cos \varphi$ . Заметим, что поверхность кольца образует с основанием полусферы угол  $\pi/2 - \varphi$ . Площадь поверхности кольца равна произведению его длины  $2\pi r = 2\pi R \cos \varphi$  на ширину  $h/\sin(\pi/2 - \varphi) = h/\cos \varphi$ . Как видно из



формулы площадь кольца не зависит от угла, под которым оно видно из центра, а это означает, что масса полусферы равномерно распределена вдоль радиуса, перпендикулярного ее основанию, значит центр масс находится на расстоянии  $R/2$  от центра.

*Примечание:* Решения, полученные интегрированием или другим способом также засчитываются, если исходят из верных начальных утверждений и корректно реализованы.

Рассмотрим силы, действующие на волчок, после того, как его отклонили и отпустили. На волчок будут действовать две силы тяжести  $M\vec{g}$  и  $m\vec{g}$ , сила реакции опоры со стороны стола  $\vec{N}$ . Направления этих сил вертикальны. Направления еще двух сил зависят от направления движения волчка. Рассмотрим случай, когда волчок возвращается в исходное состояние. В таком случае на него будет действовать сила трения, направленная влево и сила давления со стороны воды, направленная вниз и вправо. Горизонтальная составляющая силы давления со стороны воды возникает из-за наличия трения между волчком и столом, следствием которого является движение центра масс воды влево. Это движение может быть обеспечено только за счет взаимодействия со стенками. Также стоит отметить тот факт, что мы изобразили результирующую силу давления воды, которая на самом деле распределена по поверхности контакта с полусферой и в каждой точке направлена перпендикулярно поверхности, то есть от центра полусферы. Это означает, что суммарный момент этой силы относительно центра полусферы равен нулю.



Для устойчивости равновесия необходимо, чтобы после отклонения на малый угол волчок стремился вернуться обратно. Рассмотрим ось вращения, проходящую через центр полусферы. Моменты сил давления воды и реакции опоры относительно этой оси равны нулю. Сила трения нас не интересует, так как ее направление будет определяться суммарным моментом двух сил тяжести. Если суммарный момент двух сил тяжести направлен против часовой стрелки (стремится вернуть волчок в положение равновесия), то сила трения будет направлена влево и будет лишь замедлять скорость поворота волчка, но не может изменить направление его вращения. Из вышеизложенного становится понятно, что устойчивость равновесия волчка никак не зависит от количества налитой воды. Найдём положение центра масс волчка для случая  $M = 6m$ . Выберем ось  $x$ , проходящую через центр полусферы и направленную перпендикулярно ее основанию.

$$x_{\text{цм}} = \frac{6mR/2 - mR}{6m + m} > 0,$$

значит центр масс волчка расположен ниже его центра, а именно к нему приложена результирующая двух сил тяжести. Получаем, что в первом случае вне зависимости от объема налитой воды волчок будет находиться в состоянии устойчивого равновесия.

Налитая вода на равновесие не влияет. Для устойчивости равновесия необходимо чтобы центр масс волчка оказался ниже центра полусферы. Рассмотрим ту же ось  $x$ , что и в первом случае.

$$x_{\text{цм}} = \frac{MR/2 - mR}{M + m} > 0,$$

откуда  $M/m > 2$ .

### Задача №10-Т4. Бусинка на стержне

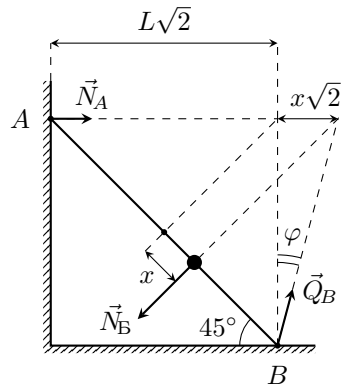
#### Первый способ

Поскольку стержень находится в равновесии — равнодействующая сил, действующих на него, должна равняться нулю, а также относительно любой точки должен равняться нулю момент действующих на стержень сил. Поскольку массой стержня можно пренебречь, можно считать, что силы прикладываются к стержню в точках  $A$ ,  $B$  и в месте положения бусинки.

Сила реакции со стороны вертикальной стены  $\vec{N}_A$  направлена горизонтально, а сила взаимодействия бусинки со стержнем  $\vec{N}_B$  направлена перпендикулярно последнему, поскольку трения между ними нет. Тогда линия действия равнодействующей сил нормальной реакции и трения в точке  $B$  — полной реакции опоры  $\vec{Q}_B = \vec{N}_B + \vec{F}_{\text{тр}}$  — должна проходить через точку пересечения линий действия  $\vec{N}_A$  и  $\vec{N}_B$  по теореме о трёх непараллельных силах. Изобразим это на рисунке.

Поскольку линия действия  $\vec{N}_A$  фиксирована, а  $\vec{N}_B$  сохраняет своё направление — точка пересечения линий действия сил перемещается горизонтально. Угол наклона стержня к вертикали составляет  $45^\circ$ , значит смещению бусинки вдоль стержня на величину  $x$  соответствует смещение пересечения линий действия сил на величину  $x\sqrt{2}$ .

Возможны два варианта начала движения стержня: скольжение по полу и стенке или вращение относительно нижнего конца. Предположим, что стержень начнёт проскальзывать. Это произойдет в тот момент, когда  $\vec{Q}_B$  более не сможет удовлетворить условию пересечения линий действия сил, т.е. угол  $\varphi$  превысит величину  $\arctg \mu$ .



Отсюда найдём перемещение бусинки  $x_{max}$ :

$$\frac{x_{max}\sqrt{2}}{L\sqrt{2}} = \mu \Rightarrow x_{max} = \mu L.$$

Стержень придет в движение до момента удара бусинки о пол, если  $x_{max} < L$ , отсюда получаем условие на коэффициент трения, при котором возможна описанная ситуация  $\mu < 1$ . Определим скорость бусинки из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mgx_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow v = \sqrt{\sqrt{2}\mu gL}.$$

### Второй способ

Расставим силы, действующие на стержень, и запишем второй закон Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$F_{тр} + N_A - \frac{N_B}{\sqrt{2}} = 0,$$

$$N_B - \frac{N_B}{\sqrt{2}} = 0$$

и правило моментов относительно точки  $B$ :

$$N_B(L - x) = N_A \frac{2L}{\sqrt{2}}.$$

Из второго закона Ньютона для бусинки в проекции на ось, перпендикулярную стержню, получим, что  $N_B = mg/\sqrt{2}$ . Решив систему уравнений, найдем:

$$N_A = \frac{mg}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad N_B = \frac{mg}{2}, \quad F_{тр} = \frac{mgx}{2L}.$$

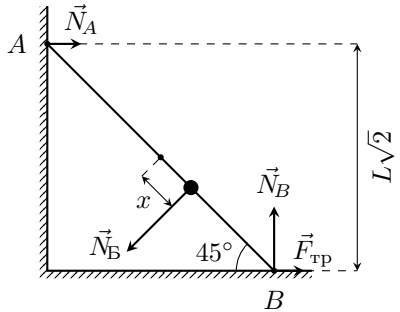
Проскальзывание начнется при  $F_{тр} = \mu N_B$ , то есть если

$$\frac{mgx}{2L} = \frac{\mu mg}{2} \Rightarrow x = \mu L.$$

Отсюда при условии, что  $x < L$ , получим  $\mu < 1$ . До начала проскальзывания бусинка движется равноускоренно с ускорением  $a = g/\sqrt{2}$ . Начальная скорость бусинки равна нулю, поэтому

$$v^2 = 2ax \Rightarrow v^2 = 2 \cdot \frac{g}{\sqrt{2}} \cdot \mu L \Rightarrow v = \sqrt{\sqrt{2}\mu gL}.$$

Силу взаимодействия стержня с вертикальной стенкой также можно определить двумя способами.



**Первый способ**

Изобразим на рисунке условие равенства нулю равнодействующей сил, действующих на стержень (см. рис.). Обратим внимание, что из второго закона Ньютона для бусинки в проекции на ось, перпендикулярную стержню,  $N_B = const = mg/\sqrt{2}$ . Тогда имеем

$$N_A = \frac{mg(1 - \operatorname{tg} \varphi)}{2}.$$

В момент отрыва  $\operatorname{tg} \varphi = \mu$ , поэтому

$$N_A = \frac{mg(1 - \mu)}{2}.$$

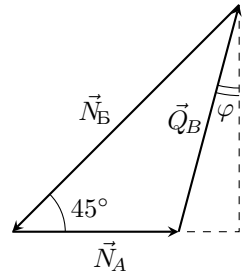
Как мы выяснили выше, описанная в условии ситуация возможна только при  $\mu < 1$ , тогда  $N_A > 0$ . Это означает, что наше предположение, о том, что проскальзывание начнется раньше переворота справедливо, а полученные ответы верны.

**Второй способ**

Так как в момент начала проскальзывания  $x = \mu L$ ,

$$N_A = \frac{mg}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{mg(1 - \mu)}{2}.$$

Как мы выяснили выше, описанная в условии ситуация возможна только при  $\mu < 1$ , тогда  $N_A > 0$ . Это означает, что наше предположение, о том, что проскальзывание начнется раньше переворота справедливо, а полученные ответы верны.



**Задача №10-Т5. Весы**

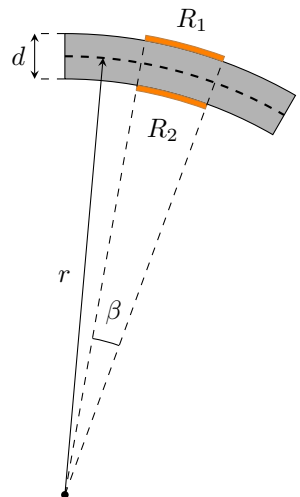
Проведем из центра дуги окружности недеформируемой линии два луча к краям резистора №1. Эти два луча отсекут на недеформируемой линии дугу, размер которой будет равен размеру резистора  $l_0$  до деформации. Положим угол между лучами равным  $\beta$ . Тогда размер резистора в недеформируемом состоянии окажется равным  $l_0 = \beta r$ .

Размер подложки после деформирования балки составит

$$l = \beta(r + d/2).$$

Тогда величина относительного удлинения резистора составит

$$\varepsilon_1 = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{d}{2r}.$$



Относительное изменение длины резистора №2 будет таким же по модулю, но отрицательным.

$$\varepsilon_2 = -\frac{l - l_0}{l_0} = -\frac{d}{2r}.$$

В ненагруженном состоянии балки напряжения на резисторах №1 и №2 одинаковы и равны половине напряжения источника питания. Показания вольтметра в этом случае будут нулевыми. При нагрузке балки сопротивление резистора №1 увеличится на величину

$$\Delta R = k\varepsilon R_0 = k \cdot \frac{d}{2r} \cdot R_0 \ll R_0,$$

а сопротивление резистора №2 уменьшится на ту же величину. Силы тока через резисторы  $R_1$  и  $R_2$ , соответственно, равны

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_0} = \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + R_0} = \frac{\mathcal{E}}{2R_0 - \Delta R}.$$

Показание вольтметра будет равно разности напряжений на резисторах  $R_3 = R_0$  и составит

$$U = (I_2 - I_1)R_0 = \left( \frac{\mathcal{E}}{2R_0 - \Delta R} - \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R} \right) \cdot R_0 = \frac{2\mathcal{E}R_0\Delta R}{4R_0^2 - (\Delta R)^2} \approx \frac{\mathcal{E}}{2} \cdot \frac{\Delta R}{R_0}.$$

С учетом ранее полученного выражения для изменений сопротивлений резисторов:

$$U = \frac{\mathcal{E}kd}{4r} = \frac{\mathcal{E}kdm}{4\alpha}.$$

Таким образом, зависимость величины показаний вольтметра от массы поставленного на платформу груза является прямой пропорциональностью, то есть  $n = 1$ . Тогда для коэффициента этой зависимости имеем:

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}kd}{4\alpha}.$$

Если недеформируемая линия балки будет проходить на некотором расстоянии  $x$  от верхней поверхности балки, то формулы для относительной деформации подложек резисторов №1 и №2 примут вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = x/r, \\ \varepsilon_2 = -(d - x)/r. \end{cases}$$

Соответственно, относительные изменения сопротивлений:

$$\begin{cases} \Delta R_1/R_0 = kx/r, \\ \Delta R_2/R_0 = -k(d - x)/r. \end{cases}$$

Тогда для показаний вольтметра аналогично предыдущему случаю получим:

$$U' = \left( \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R_2} - \frac{\mathcal{E}}{2R_0 + \Delta R_1} \right) \cdot R_0 = \frac{\mathcal{E} R_0 (\Delta R_1 - \Delta R_2)}{(2R_0 + \Delta R_1)(2R_0 + \Delta R_2)} \approx \frac{\mathcal{E}}{4} \cdot \frac{\Delta R_1 - \Delta R_2}{R_0},$$

откуда

$$U' = \frac{k \mathcal{E}}{4} \left( \frac{x}{r} + \frac{d-x}{r} \right) = \frac{\mathcal{E} k d}{4r} = U.$$

То есть полученный ранее ответ не зависит от места положения недеформируемой линии.

Теперь предположим, что балка ко всему прочему нагрелась. Тогда к относительным изменениям длины подложек резисторов добавятся еще и удлинения за счет теплового расширения балки:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = d/(2r) + \varepsilon_3, \\ \varepsilon_2 = -d/(2r) + \varepsilon_3. \end{cases}$$

Проведя аналогичные вычисления получим, что и в этом случае показания вольтметра останутся прежними:

$$U'' = \frac{k \mathcal{E}}{4} \left( \frac{d}{2r} + \varepsilon_3 - \frac{d}{2r} - \varepsilon_3 \right) = \frac{\mathcal{E} k d}{4r} = U.$$

То есть предложенная схема тензоэлектрического датчика является термостабильной и в целом не чувствительна к деформациям растяжения-сжатия балки.

Шифр

 $\Sigma$ 

## 10-Т1. Зонд

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Получен коэффициент пропорциональности в зависимости давления воздуха от высоты $k = 8 \text{ К/км}$ <i>Примечание:</i> баллы за пункт ставятся, даже если коэффициент явным образом не вычислен, но записано верное выражение, позволяющее определить температуру воздуха на нужных высотах.	1.0		
1.2	Формула для плотности газа $\rho = pM/RT$	1.0		
1.3	Определена масса гелия в шаре $m_{\text{г}} = p_0 M_{\text{г}} V / (RT_0)$	1.0		
1.4	Записано условие равновесия (сила тяжести равна силе Архимеда)	1.0		
1.5	Определена масса датчиков (формула) $m_{\text{д}} = p_1 M_{\text{в}} V / (RT_1) - p_0 M_{\text{г}} V / (RT_0) - m_0$	2.0		
1.6	Определена масса датчиков (число) $m_{\text{д}} = 4,9 \pm 0,1 \text{ кг}$ . <i>Примечание:</i> Если численный ответ верный и получен из правильных соображений, то баллы за предыдущий ставятся полностью даже при отсутствии конечной формулы.	1.0		
2.1	Реализована методика нахождения максимальной высоты подъема без датчиков. Например: • получена функция $p(h) = (m_{\text{г}} + m_0)R / (M_{\text{в}} V) \cdot (T_0 - k \cdot h)$ и предложен графический способ нахождения высоты <b>или</b> • предложена реализуемая методика постепенного подбора значения высоты	2.0		
2.2	Численный ответ $h_{\text{макс}} = 7.6 \pm 0.2 \text{ км}$ .	3.0		

Шифр

 $\Sigma$ **10-Т2. Наклонная плоскость**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Из второго закона Ньютона получено, что $N = mg \cos \alpha$	0.5		
1.2	Верно определено изменение потенциальной энергии при перемещении из нижней точки в верхнюю $\Delta E_{\text{пот}} = 2mgL \sin \alpha$ <i>Примечание:</i> Это выражение может быть сразу записано в ЗСЭ. Если оно записано правильно, то баллы ставятся.	0.5		
1.3	Верно определена работа силы трения $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}} \pi L$ <i>Примечание:</i> Баллы ставятся при правильном знаке и правильном перемещении точки приложения <i>Примечание 2:</i> Это выражение может быть сразу записано в ЗСЭ. Если оно записано правильно, то баллы ставятся.	1.0		
1.4	Явно указано, что сила реакции со стороны стержня на груз не совершает работы (или сила со стороны шарнира на стержень, если ЗСЭ записан для системы из стержня и груза). <i>Примечание:</i> Отсутствие данного слагаемого в ЗСЭ без каких либо обоснований не считается явным указанием на нулевую работу, балл в этом случае не ставится.	0.5		
1.5	Верно записан ЗСЭ (присутствуют все слагаемые и верные знаки)	1.0		
1.6	Получено, что $v_1 = \sqrt{(4 + \pi)gL \sin \alpha}$ или $v_1 = \sqrt{7.14 gL \sin \alpha}$	1.5		
2.1	Продемонстрировано понимание того, что после прохождения «верхней» точки тело будет еще какое-то время замедляться	1.0		
2.2	Верная идея определения точки, в которой скорость будет минимальна ( $a_{\tau} = 0$ или аналогичная)	1.5		



2.3	Верно определено положение точки, в которой скорость будет минимальна ( $\beta = \pi/6$ )	1.0		
2.4	Верно определена работа силы трения для второго вопроса <i>Примечание:</i> Это выражение может быть сразу записано в ЗСЭ. Если оно записано правильно, то баллы ставятся.	0.5		
2.5	Верно определено изменение потенциальной энергии для второго вопроса <i>Примечание:</i> Это выражение может быть сразу записано в ЗСЭ. Если оно записано правильно, то баллы ставятся.	0.5		
2.6	Верно записан ЗСЭ для второго вопроса (присутствуют все слагаемые и верные знаки)	1.0		
2.7	Получено, что $v_2 = \sqrt{(2 + \sqrt{3} + 7\pi/6)gL \sin \alpha}$ или $v_2 = \sqrt{7.40 gL \sin \alpha}$	1.5		

Шифр

 $\Sigma$ 

## 10-Т3. Волчок

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Предложен реализуемый метод определения центра масс полусферы	1.0		
1.2	Доказано, что центр масс полусферы находится на расстоянии $R/2$	2.0		
2.1	На рисунке присутствуют две силы тяжести (полусфера и груз) или их результирующая, направленная(ые) вертикально вниз. Точки приложения сил - верные.	0.5		
2.2	На рисунке присутствует сила реакции опоры, направленная вертикально вверх. Точка приложения силы - верная.	0.5		
2.3	На рисунке присутствует сила трения, направленная по горизонтали в любую из сторон. Точка приложения силы - верная.	1.0		
2.4	На рисунке присутствует сила давления воды, направленная под углом к вертикали (выберите один из трёх вариантов, указанных ниже) — Горизонтальная составляющая силы давления противоположна силе трения (балл ставится при наличии правильной изображенной силы трения) — Сила давления направлена вертикально вниз — Иные варианты	1.0  1.0 0.5 0.0		
3.1	Верно определена сумма моментов сил относительно выбранной участником оси	1.0		
3.2	Присутствует явное обоснование нулевого момента силы давления относительно центра сферы, либо он правильно вычислен относительно другой оси, либо указано, что при предельном случае сила давления воды вертикальна и точка ее приложения лежит над точкой контакта полусферы с плоскостью. : Если при ответе на второй вопрос участник считает, что сила давления направлена по вертикали и приравнивает ее момент нулю на этом основании, то за данный пункт ставится 0 баллов.	1.0		

3.3	Корректно учтен момент силы трения, либо выбрана ось относительно которой он равен нулю, либо обосновано, почему его можно не учитывать.	1.0		
3.4	Получен обоснованный ответ, что при любом объеме воды в первом случае волчок будет в устойчивом равновесии. : Баллы за эти пункты ставятся даже при отсутствии обоснования о нулевом моменте силы трения, неправильном направлении силы давления.	1.5		
4.1	Получен обоснованный ответ, для второго случая $M/t > 2$ . : Баллы за эти пункты ставятся даже при отсутствии обоснования о нулевом моменте силы трения, неправильном направлении силы давления.	1.5		

Шифр

 $\Sigma$ 

## 10-Т4. Бусинка на стержне

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	На стержень действуют силы реакции опоры со стороны стенки и пола, сила трения со стороны пола и сила со стороны бусинки (изображено на рисунке или явно следует из уравнений)	0.5		
1.2	Сила реакции опоры со стороны стенки направлена горизонтально, а со стороны пола – вертикально (изображено на рисунке или явно следует из уравнений)	0.5		
1.3	Сила трения, действующая на стержень направлена вправо. <i>Примечание:</i> На рисунке изначально сила может быть направлена влево. Если из дальнейшего решения явным образом следует обратное направление (например, сила получилась отрицательной), то балл ставится.	1.0		
1.4	Сила, действующая на стержень со стороны бусинки направлена перпендикулярно стержню	0.5		
1.5	Верно записаны условия равновесия стержня и количество уравнений достаточно для получения ответа на вопрос задачи: либо равенство нулю моментов сил относительно оси, указанной в авторском решении, либо равенство нулю суммы моментов сил относительно другой оси + равенство нулю суммы сил. <i>Примечание:</i> Баллы ставятся только за уравнения с подставленными значениями проекций и длин плеч.	2.0		
1.6	Верно записано условие начала проскальзывания: сила трения превышает предельное значение или угол наклона силы реакции со стороны пола превышает предельный	1.0		
1.7	Записан закон сохранения энергии для бусинки, или зависимость скорости бусинки от ее положения выражена из кинематики и второго закона Ньютона, записанных для бусинки	0.5		

1.8	Верное значение скорости бусинки в момент начала движения стержня $v = \sqrt{\sqrt{2}\mu g L}$	1.5		
1.9	Верное ограничение на коэффициент трения $\mu < 1$	1.5		
2.1	Верное значение силы реакции опоры со стороны стенки в этот момент времени $N_A = mg(1 - \mu)/2$	2.0		
2.2	Присутствует явным образом записанное обоснование, что стержень начнет скользить, а не переворачиваться	1.0		

Шифр

 $\Sigma$ 

## 10-Т5. Весы

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Получено выражение для $\varepsilon_1$ в случае среднего положения недеформируемой линии	1.0		
2.1	Получено выражение для $\varepsilon_2$ в случае среднего положения недеформируемой линии	1.0		
3.1	<ul style="list-style-type: none"> <li>Записано выражение напряжения на резисторе <math>R_1</math> через сопротивление <math>R_0</math> и изменение сопротивления №1 (с учетом разложения до первого порядка малости или без разложения) <b>или</b></li> <li>записано выражение напряжения на верхнем резисторе <math>R_3</math> через сопротивление <math>R_0</math> и изменение сопротивления №1 (с учетом разложения до первого порядка малости или без разложения) <b>или</b></li> <li>для цепи верно записаны первые правила Кирхгофа в количестве достаточном для нахождения напряжения на вольтметре.</li> </ul>	1.0		
3.2	<ul style="list-style-type: none"> <li>Записано выражение напряжения на резисторе <math>R_2</math> через сопротивление <math>R_0</math> и изменение сопротивления №2 (с учетом разложения до первого порядка малости или без разложения) <b>или</b></li> <li>записано выражение напряжения на нижнем резисторе <math>R_3</math> через сопротивление <math>R_0</math> и изменение сопротивления №1 (с учетом разложения до первого порядка малости или без разложения) <b>или</b></li> <li>для цепи верно записаны вторые правила Кирхгофа в количестве достаточном для нахождения напряжения на вольтметре <b>или</b></li> <li>верно расставлены потенциалы и записаны законы Ома в количестве достаточном для нахождения напряжения на вольтметре.</li> </ul>	1.0		

3.3	Записано выражение для напряжения на вольтметре через изменение сопротивлений тензорезисторов (с учетом разложения до первого порядка малости или без разложения). <i>Примечание:</i> Если получено верное выражение, баллы за два предыдущих пункта ставятся автоматически.	1.0		
3.4	Получена формула $U = Ekd\alpha/(4\alpha)$ .	1.5		
3.5	Явно найдена степень $n$ зависимости показаний вольтметра от массы поставленного на платформу весов груза. <i>Примечание:</i> баллы ставятся только при явном указании значения коэффициента. Просто записи формулы из пункта 3.4 не достаточно.	0.5		
3.6	Явно получено выражение для коэффициента пропорциональности $\gamma$ . <i>Примечание:</i> баллы ставятся только при явном указании значения коэффициента. Просто записи формулы из пункта 3.4 не достаточно.	1.0		
4.1	Указано, что показания вольтметра не изменятся. (Даже при отсутствии обоснований)	0.5		
4.2	Предыдущее утверждение обосновано.	1.5		
5.1	Указано, что показания вольтметра не изменятся. (Даже при отсутствии обоснований)	0.5		
5.2	Предыдущее утверждение обосновано.	1.5		

## 11 класс

### Задача №11-Г1. Вращающаяся гильза

Скорость точек на внешней поверхности гильзы направлена к оси гильзы под углом  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega R}{v}$ . Сила трения, действующая на элементы поверхности гильзы, направлена противоположно их скорости, а значит, не изменяет угол между векторами скоростей точек гильзы и её осью, а влияет лишь на модули этих скоростей. Следовательно, в процессе торможения гильзы отношение скорости ее поступательного движения и линейной скорости вращательного движения точек ее поверхности остается неизменной:  $\frac{\omega R}{v} = \frac{\omega_0 R}{v_0}$ .

Так как это обстоятельство очень важно для решения, приведем другой возможный способ его обоснования. Сила трения скольжения, в силу информации о постоянстве сил нормальной реакции стенок отверстия, для каждого малого элемента поверхности гильзы имеет постоянную величину и направлена против его скорости. Действие сил трения можно разделить на торможение поступательного движения (результатирующая сила  $F_x(x) = F(x) \cos \alpha$ ) и торможение вращения гильзы (тормозящий момент равен моменту силы  $F_{\perp}(x) = F(x) \sin \alpha$ ). Поэтому ускорения, с которыми уменьшаются скорость ее поступательного движения  $v_x = v \cos \alpha$  и линейная скорость вращательного движения точек ее поверхности  $v_{\perp} = \omega R = v \sin \alpha$ , пропорциональны этим скоростям. Следовательно, отношение величин этих скоростей остается неизменным:

$$\frac{(v_{\perp})'_t}{(v_x)'_t} = \frac{v_{\perp}}{v_x}, \quad \left( \frac{v_{\perp}}{v_x} \right)'_t = \frac{v_x(v_{\perp})'_t - v_{\perp}(v_x)'_t}{v_x^2} = 0, \quad \frac{v_{\perp}}{v_x} = \operatorname{const}$$

Поэтому и  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_x} = \operatorname{const}$ .

В направлении поступательного движения ускорение гильзы определяется проекцией силы трения

$$F_x(x) = F(x) \cos \alpha = F(x) \frac{v_0}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}.$$

Поэтому движения вращающейся гильзы в направлении оси аналогично движению невращающейся гильзы при действии «уменьшенной» силы  $F_x(x)$ . Минимальное значение скорости  $v_{\min}$  при учете этого можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} = -A_{mp} = \frac{F_x(l)2l}{2} = \frac{F_0 l v_{\min}}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_{\min}^2}}.$$

Из этого уравнения находим



$$v_{\min} = \sqrt{\sqrt{\frac{(\omega_0 R)^4}{4} + 4 \left(\frac{F_0 l}{m}\right)^2} - \frac{(\omega_0 R)^2}{2}}.$$

Для ответа на второй вопрос достаточно заметить, что угловая скорость и скорость поступательного движения гильзы всё время связаны соотношением  $\frac{\omega}{v} = \frac{\omega_0}{v_0}$ . В момент полного погружения скорость поступательного движения  $v_1$  в  $\sqrt{2}$  раз меньше начальной скорости  $v_0 = v_{\min}$ , так как работа сил трения к этому моменту составляет ровно половину от величины работы до момента вылета. Поэтому

$$\omega_1 = \frac{v_1}{v_0} \omega_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}.$$

При движении гильзы внутри отверстия до момента полного проникновения ее внутрь плиты сила  $F_x$  линейно увеличивается. Ускорение гильзы

$$a = -\frac{F_0 \cos \alpha}{ml} x.$$

Это формула совпадает с уравнением гармонических колебаний с циклической частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_0 \cos \alpha}{ml}} = \sqrt{\frac{F_0 v_0}{ml \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}}.$$

Координата переднего среза гильзы зависит от времени как

$$x = x_0 \sin \Omega t,$$

где  $x_0$  определяется при этом из условия  $x_0 = \frac{v_0}{\Omega} = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}}$ . Тогда до момента полного погружения гильзы в отверстие

$$x = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \sin \Omega t,$$

и время погружения  $\tau$  находится из уравнения

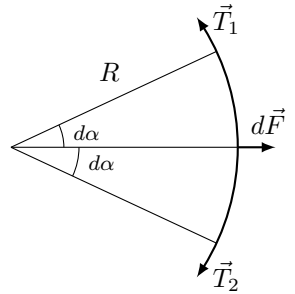
$$l = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \sin \Omega t,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{F_0 l \cos \alpha}{m v_0^2}} \right)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{ml \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}{F_0 v_0}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{F_0 l}{m v_0 \sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}} \right).$$

**Задача №11-Т2. Как измерить поверхностное натяжение?**

Так как нить невесома и сила поверхностного натяжения везде перпендикулярна нити, сила натяжения нити постоянна  $T = const$ . Если взять участок нити длины  $dl$  и пренебречь действием силы тяжести, то на него действуют только силы натяжения нити ( $T_1 = T_2 = T$ ) и сила поверхностного натяжения  $dF$ . Приближим участок нити дугой окружности некоторого радиуса  $R$ . Тогда сила поверхностного натяжения  $dF = 2\sigma dl = 4\sigma R d\alpha$  (с учетом того, что у пленки две поверхности). В радиальной проекции имеем условие равновесия:  $2T \sin(d\alpha) = dF$ . Отсюда  $R = T/2\sigma$ , и таким образом  $R = const$ , то есть вся нить имеет форму дуги окружности. Поскольку  $AB$  и  $CD$  равны, минимальное расстояние между нитями достигается на середине высоты.

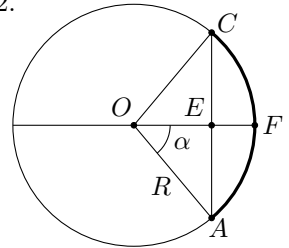


Из рисунка для расстояний:  $AC = h$ ,  $EF = (L - d)/2$ . По теореме Пифагора для треугольника  $\triangle OEA$ :

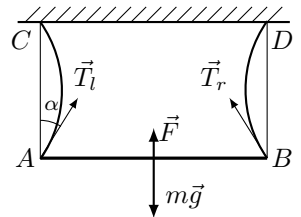
$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{L - d}{2}\right)^2,$$

откуда

$$R = \frac{(L - d)^2 + h^2}{4(L - d)}.$$



Рассмотрим часть системы, находящуюся ниже средней линии. Условие равновесия для нее:  $2T + 2\sigma d = mg$  или  $4\sigma R + 2\sigma d = mg$ . (Либо можно рассмотреть силы, действующие непосредственно на планку:  $2T \cos \alpha + 2\sigma L = mg$ . Также в этом случае понадобится найти, под каким углом нить подходит к планке:  $\sin \alpha = h/2R$ ). Подставляя из найденного ранее радиус нити:



$$\sigma = \frac{mg(L - d)}{h^2 + L^2 - d^2}$$

Подставляя числовые значения величин, находим:  $\sigma = 0.066 \text{ Н/м}$ .

**Задача №11-Т3. Трапеция лорда Кельвина**

Теплоёмкость  $C$  газа равна:

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV}{dT} = \nu C_V + \frac{pdV}{dT}$$

Поймём, для каких линейных процессов  $p(V)$ , кроме  $p = const$  и  $V = const$ , теплоёмкости являются постоянными. Пусть  $p = p_0 + \alpha V$ . Тогда из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$(p_0 + \alpha V)V = \nu RT \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \frac{p_0 + 2\alpha V}{\nu R}$$

Подставляя выражение для  $dT/dV$  в выражение для теплоёмкости, получим:

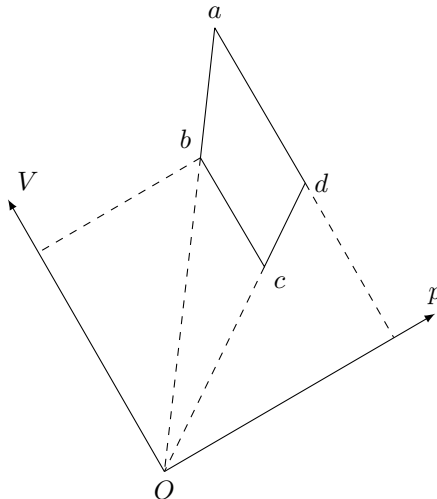
$$C = \nu \left( C_V + R \cdot \frac{p_0 + \alpha V}{p_0 + 2\alpha V} \right)$$

Теплоёмкость не зависит от объёма, если  $p_0 = 0$ , что соответствует прямой, проходящей через начало координат. Поскольку  $C_p = C_V + R$ , имеем:

$$C_V < C = \frac{C_p + C_V}{2} < C_p$$

Поскольку  $C_{bc} = C_{da} > C_{ab} = C_{cd}$  — процессы  $bc$  и  $da$  являются изобарными, а процессы  $ab$  и  $cd$  соответствуют прямым линиям, проходящим через начало координат.

Проведя линии  $ab$  и  $cd$  до пересечения, найдём положение начала координат. Далее, проводя через начало координат лучи, параллельные и перпендикулярные направлению изобар, получим направления осей объёма  $V$  и давления  $p$  соответственно.



Поскольку  $p_a = p_d$  и  $p_b = p_c$ , из подобия треугольников следует, что  $V_b/V_c = V_a/V_d$ . Тогда имеем:

$$\frac{T_b}{T_c} = \frac{V_b}{V_c} = \frac{V_a}{V_d} = \frac{T_a}{T_d} \Rightarrow T_b T_d = T_a T_c$$

Поскольку  $T_b > T_c$  и  $T_a > T_d$  - температуры в точках  $b$  и  $d$  одинаковы и равны  $T_2$ , а температура в точке  $a$  максимальна и равна  $T_1$ . Тогда температура в точке  $c$  равна  $T_3 = T_2^2/T_1$ . Таким образом:

$$T_a = 400 \text{ К} \quad T_b = T_d = 200 \text{ К} \quad T_c = 100 \text{ К}$$

Газ получает тепло на участках  $cd$  и  $da$ , а отдаёт — на участках  $ab$  и  $bc$ . Тогда имеем:

$$Q_+ = C(T_2 - T_3) + C_p(T_1 - T_2) \quad Q_- = C(T_1 - T_2) + C_p(T_2 - T_3)$$

Поскольку  $C_p = 7\nu R/2$  и  $C = 3\nu R$ , находим:

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{6(T_1 - T_2) + 7(T_2 - T_2^2/T_1)}{6(T_2 - T_2^2/T_1) + 7(T_1 - T_2)}$$

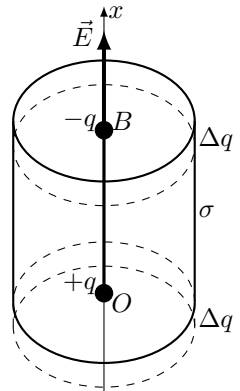
После упрощения:

$$\eta = 1 - \frac{6T_1 + 7T_2}{6T_2 + 7T_1} = 0,05$$

### Задача №11-Т4. Цилиндр и нелинейная плотность заряда

Цилиндр можно разделить на тонкие параллельные основанию кольца, напряженность каждого из которых будет направлена в точке  $O$  вниз, а в точке  $B$  вверх вдоль оси цилиндра — в силу осевой симметрии в распределении заряда. Соответственно сила, действующая на отрицательный заряд в точке  $B$ , направлена так же, как и сила, действующая на положительный заряд в точке  $O$  — вниз вдоль оси цилиндра, или против оси  $x$  на рисунке. Точно также — противоположно оси  $x$  — направлена и суммарная сила, действующая на диполь.

Пусть  $E_1$  — величина напряженности поля цилиндра в точке  $O$ , а  $E_2$  — величина напряженности в точке  $B$ . Тогда величина силы, действующей на диполь,  $F = q(E_1 + E_2)$ . Наложим на наш цилиндр еще один такой же, с поверхностной



плотностью заряда симметричной исходному цилиндру:  $\sigma'(x) = \sigma(H - x)$ . В результате сложения получится цилиндр, равномерно заряженный по поверхности с плотностью заряда  $\sigma_0$ :

$$\sigma(x) + \sigma'(x) = \sigma_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2H}\right) + \sigma_0 \sin^2\left(\frac{\pi(H-x)}{2H}\right) = \sigma_0.$$

При этом по принципу суперпозиции в центре каждого из оснований будет одинаковая по величине напряженность, равная нужной нам для вычисления силы величине  $E = E_1 + E_2$ .

Поле в центре основания однородно заряженного цилиндра определим через скорость изменения потенциала по формуле:  $E_x = -\Delta\varphi/\Delta x$ . Заметим, что, если сдвинуть точку В вверх на  $\Delta x$ , то это равносильно смещению цилиндра, то есть исчезновению сверху кольца с зарядом  $\Delta q$  (обозначено на рисунке пунктирной линией) и прибавлению такого же кольца вниз. Разность потенциалов двух выделенных колец равна  $\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\Delta q}{4\pi\epsilon_0 R}$ , причем  $\Delta q = \sigma_0 \cdot 2\pi R \cdot \Delta x$ . Таким образом,

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right),$$

и величина силы

$$F = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right).$$

Участники, знакомые с интегрированием, могут вычислить  $E_1 + E_2$  непосредственно из принципа суперпозиции, складывая напряженности отдельных колец

$$dE_x = \frac{dq \cdot x}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}};$$

$$E_1 + E_2 = \int_0^H \frac{\sigma_0 \cdot 2\pi R x}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma_0 R}{2\epsilon_0} \left(-\int_0^H d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right)\right)$$

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}\right).$$

### Задача №11-Т5. Движение в скрещенных полях

Поскольку мощность силы Лоренца всегда равна нулю - кинетическая энергия частицы равна работе силы, действующей на неё со стороны электрического поля. Отсюда:

$$\frac{mv^2}{2} = qEy \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qEy}{m}}$$

Вдоль оси  $x$  на частицу действует только сила Лоренца. Из второго закона Ньютона:

$$ma_x = qv_y B(y)$$

$$\Delta v_x(y) = \frac{qv_y B(y) \Delta t}{m} = \frac{\alpha q \sqrt{y} \Delta y}{m} = \frac{2\alpha q \Delta(y^{3/2})}{3m} \Rightarrow v_x(y) = \frac{2\alpha q y^{3/2}}{3m}$$

Из условия  $v = v_x$  в момент, когда скорость частицы направлена вдоль оси  $x$ , найдём соответствующую данному моменту координату частицы  $y_1$ :

$$\sqrt{\frac{2qEy_1}{m}} = \frac{2\alpha q y_1^{3/2}}{3m} \Rightarrow y_1 = \frac{3m}{2\alpha q} \sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

откуда:

$$v_1 = \sqrt{\frac{3E}{\alpha} \sqrt{\frac{2qE}{m}}}$$

Найдём радиус кривизны траектории в точке с координатой  $y$ . Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось, перпендикулярную направлению скорости частицы:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB + qE_n$$

где  $E_n$  - перпендикулярная скорости компонента электрического поля. Для неё имеем:

$$E_n = -E \cdot \frac{v_x}{v} = -\frac{\alpha y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

Подставляя во второй закон Ньютона, находим:

$$\frac{2qEy}{R} = \alpha q y \sqrt{\frac{2qE}{m}} - \frac{\alpha q y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}} = \frac{2\alpha q y}{3} \sqrt{\frac{2qE}{m}}$$

откуда:

$$R = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{mE}{2q}} = const$$

При решении второго пункта было получено, что  $R = \text{const}$ . Это означает, что частица двигалась по полуокружности до тех пор, пока не остановилась.

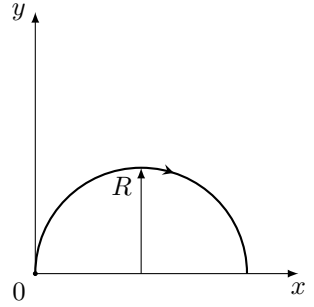
Обратим внимание, что после остановки движение частицы повторяется — она вновь будет двигаться по окружности того же радиуса, но уже из нового положения, находящегося от начального на расстоянии, равном диаметру окружности  $2R$ . Также обратим внимание, что за половину периода частица проходит половину окружности, поскольку  $v \sim \sqrt{\sin \varphi}$ , где  $\varphi$  — угловой размер пройденной дуги.

Тогда через время  $\tau = 3T/2$  координаты частицы равны  $(x, y) = (3R, R)$ , и модуль её перемещения составляет:

$$S(\tau) = \sqrt{10}R$$

или же:

$$S(\tau) = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{5mE}{q}}$$



Шифр

 $\Sigma$ **11-Т1. Вращающаяся гильза**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Указано (используется в решении), что угол $\alpha$ между скоростью точек поверхности и направлением движения остается постоянным или показано, что $\frac{\omega R}{v} = const$	1.0		
1.2	Найдена проекция силы трения на направление движения в виде $F_x = F(x) \frac{v_0}{\sqrt{(\omega_0 R)^2 + v_0^2}}$ – Если уравнение записано в виде $F_x(x) = F(x) \cos \alpha$ без правильного выражения для $\alpha$	1.0  0.5		
1.3	Корректно записан закон сохранения энергии для прохождения гильзы через отверстие	1.0		
1.4	Получен правильный ответ для минимальной скорости	2.0		
2.1	При ответе на второй вопрос использована связь скорости движения и угловой скорости $\frac{\omega R}{v} = \frac{\omega_0 R}{v_0}$ или $\frac{\omega}{v} = \frac{\omega_0}{v_0}$	1.0		
2.2	Из закона сохранения энергии получено $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$	1.0		
2.3	Получен ответ на второй вопрос $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$	1.0		
3.1	Указано, что уравнения движения гильзы в отверстии аналогичны уравнению колебаний или явно записано уравнение движения	0.5		
3.2	Найдена эффективная частота для движения гильзы через отверстие $\Omega = \sqrt{\frac{F_0 \cos \alpha}{ml}}$	1.0		
3.3	Правильно записан закон движения гильзы до момента полного погружения гильзы в отверстие $x = x_0 \sin \Omega t$	0.5		
3.4	Найдена эффективная амплитуда – коэффициент перед синусом $x = v_0 \sqrt{\frac{ml}{F_0 \cos \alpha}}$	1.0		
3.5	Найдено искомое время движения $\tau$	1.0		



Шифр

Σ

## 11-Т2. Как измерить поверхностное натяжение?

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Утверждение о постоянстве силы натяжения по всей длине нити из-за невесомости нити и перпендикулярности сил поверхностного натяжения к участкам нити.	1.0		
1.2	Доказано, что нить представляет собой часть дуги окружности.	2.0		
1.3	Получено соотношение между радиусом кривизны нити и силой натяжения $T = 2R\sigma$	1.0		
1.4	Радиус кривизны нити выражен через $L, d, h$ : $R = \frac{(L-d)^2 + h^2}{4(L-d)}$ . – Если только получено соотношение между $R, L, d, h$ , но радиус не выражен явно	2.0  1.0		
1.5	<b>Метод 1.</b> Записано условие равновесия для нижней половины системы: $2T + 2\sigma d = mg$	2.0		
1.6°	<b>Метод 2.</b> Записано условие равновесия для планки: $2T \cos \alpha + 2\sigma L = mg$	1.0		
1.7°	<b>Метод 2.</b> Угол, под которым нить подходит к планке, выражен через радиус: $\sin \alpha = \frac{h}{2R}$	1.0		
1.8	Получена формула для коэффициента поверхностного натяжения $\sigma = \frac{mg(L-d)}{h^2 + L^2 - d^2}$	2.0		
2.1	Получен численный ответ в диапазоне 0.063 – 0.069 Н/м	2.0		

Шифр

 $\Sigma$ **11-Т3. Трапеция лорда Кельвина**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Указано (используется в решении), что линейный процесс с постоянной теплоёмкостью может быть изобарой или изохорой.	0.5		
1.2	Указано, что процесс $p = \alpha V$ является линейным процессом с постоянной теплоёмкостью.	1.0		
1.3	Указано, что теплоёмкость газа в процессе $p = \alpha V$ равна (любой вариант или эквивалентная формула): $C = \frac{c_p + C_V}{2} = C_V + \frac{\nu R}{2} = 3\nu R.$	1.0		
1.4	В решении содержится утверждение, что других линейных процессов с постоянной теплоёмкостью нет.	0.5		
1.5	Доказано утверждение, что других линейных процессов с постоянной теплоёмкостью нет.	1.0		
1.6	Сделан вывод, что процессы $bc$ и $da$ являются изобарными.	1.0		
1.7	Указано, что продолжения отрезков $ab$ и $cd$ пересекаются в начале координат.	0.5		
1.8	Правильно восстановлены положения координатных осей $p$ и $V$ (по 0,5 балла за каждую)	2 точки по 0.5		
2.1	Обоснованно получены ответы для $T_b$ и $T_d$ : $T_b = T_d = 200 \text{ К.}$	0.5		
2.2	Обоснованно получен ответ для $T_a = 400 \text{ К.}$	0.5		
2.3	Получено соотношение: $T_b \cdot T_c = T_a \cdot T_d$ или эквивалентное ему.	1.0		

2.4	Получен ответ для $T_c$ : $T_c = 100 \text{ К.}$	0.5		
3.1	Записана формула для КПД цикла $\eta$ : $\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = \frac{A}{Q_+} = \frac{A}{A + Q_-}$	0.5		
3.2	Получены правильные формулы для любых двух из трёх величин (любой вариант или эквивалентная формула): $Q_+ = C(T_d - T_c) + C_p(T_a - T_d) = \frac{\nu R(7T_a - 6T_c - T_d)}{2}$ $Q_- = C(T_a - T_b) + C_p(T_b - T_c) = \frac{\nu R(6T_a + T_b - 7T_c)}{2}$ $A = \frac{\nu R(T_a + T_c - T_b - T_d)}{2}$	2 вел. по 0.5		
3.3	Получены правильная формула для КПД (любой вариант или эквивалентная формула): $\eta = \frac{T_a + T_c - T_b - T_d}{7T_a - 6T_c - T_d} = \frac{T_1 - T_2}{7T_1 + 6T_2}$	1.0		
3.4	Получен правильный численный ответ для $\eta$ : $\eta = 0,05$	0.5		
	<i>Примечание:</i> при использовании формул для $C_p$ и $C_V$ не для двухатомного газа пункты 3.3 и 3.4 оцениваются в 0 баллов, а остальные пункты оцениваются в полный балл при правильных вычислениях.			

Шифр

 $\Sigma$ 

## 11-Т4. Цилиндр и нелинейная плотность заряда

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	В решении присутствует обоснование того, что вектора напряженности в точках $O$ и $B$ направлены вдоль оси цилиндра, связанное, например, с осевой симметрией в распределении заряда (при его разбиении на кольца)	0.5		
2	В решении присутствует утверждение, что напряженности поля цилиндра в точках $O$ и $B$ направлены противоположно (или что силы, действующие на заряды диполя, сонаправлены)	0.5		
3	Указано верное направление суммарной силы (вниз или противоположно оси $Ox$ )	1.0		
4	Записано (используется в решении) верное выражение для напряженности (или потенциала) на оси кольца (при верном ответе на п. 8 этот балл ставится в любом случае)	1.0		
5	Отмечена (используется в решении) симметрия в распределении заряда: $\sigma(x) = \sigma_0 - \sigma(H - x)$	1.0		
6	Предложен метод наложения перевернутого симметрично такого же цилиндра на исходный цилиндр, с получением равномерно заряженной поверхности	3.0		
7	Пояснено, что в этом случае поле в центре основания равномерно заряженного цилиндра равно: $E = E_1 + E_2$	1.0		
8	Любым из корректных способов (в том числе через скорость изменения потенциала или интегрированием результатов п. 4) правильно найдено поле в центре основания равномерно заряженного цилиндра	2.0		
9	Указано (используется в решении), что искомая сила $F = q(E_1 + E_2)$	0.5		
10	Получено верное выражение для модуля $F$	1.5		

Шифр

 $\Sigma$ **11-Т5. Движение в скрещенных полях**

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Правильно записан закон сохранения механической энергии: $\frac{mv^2}{2} = qEy.$	1.0		
1.2	Правильно записано уравнение движения для частицы в проекции на ось $x$ (*): $ma_x = +qB(y)v_y = +\alpha q\sqrt{y} \cdot v_y.$	0.5		
1.3	Правильно найдена зависимость $v_x(y)$ (**): $v_x(y) = \frac{2\alpha q}{3m} \cdot y^{3/2}.$	1.5		
1.4	Правильно определено максимальное значение $y$ (при котором скорость направлена вдоль оси $x$ ): $y_1 = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{mE}{2q}}.$	1.0		
1.5	Получен правильный ответ на первый вопрос: $v_1 = \sqrt{\frac{3E}{\alpha}} \sqrt{\frac{2qE}{m}}.$	1.0		

2.1	<p>Записаны выражения для нормальной компоненты ускорения через радиус кривизны (0.5 балла) и через уравнение движения частицы в проекции на нормальную ось (0.5 балла):</p> $a_n = \frac{v^2}{R} \quad a_n = \frac{qvB}{m} + \frac{qE_n}{m}.$	2 точки по 0.5		
2.2	<p>Записано правильное выражение для нормальной компоненты напряжённости электрического поля:</p> $E_n = -E \cdot \frac{v_x}{v}$ <p>или эквивалентное выражение.</p>	1.0		
2.3	Показано, что радиус кривизны траектории остаётся постоянным (***)).	1.5		
2.4	<p>Получено выражение для радиуса кривизны траектории:</p> $R = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{mE}{2q}}.$	1.0		
3.1	В ответе на третий вопрос на рисунке изображена полуокружность с правильными положениями её центра и точки старта (***)).	0.5		
4.1	Указано, что после остановки в момент времени $T$ частица начнёт двигаться по такой же полуокружности, центр которой смещён на расстояние $2R$ вдоль оси $x$ (***)).	0.5		
4.2	<p>Правильно указано положение частицы в момент времени <math>\tau = 3T/2</math> следующими способами (***):</p> <p>1) Указаны координаты частицы <math>(x,y) = (3R,R)</math>;</p> <p>2) Указано, что частица находится в вершине второй полуокружности.</p>	0.5		
4.3	<p>Получен правильный ответ на четвёртый вопрос:</p> $S(\tau) = \frac{3}{\alpha} \sqrt{\frac{5mE}{q}}$	1.0		

	<p>* - При ошибке в знаке пункт оценивается в 0 баллов, но если в дальнейшем решении других ошибок (кроме знаков проекции скорости <math>v_x</math> и смещений по оси <math>x</math>) нет, то последующие результаты оцениваются в полный балл;</p> <p>** - Если в пункте ошибка в коэффициенте перед <math>y^{3/2}</math> - пункты 2.4 и 4.3 автоматически оцениваются в 0 баллов. Если в этом пункте неправильная степенная зависимость от <math>y</math> - из всех пунктов 1.4-4.4 баллы можно получить только за пункты 2.1 и 2.2;</p> <p>*** - Баллы за пункты 2.3 и 3.1, 4.1, 4.2 выставляются и при неправильном определении <math>R</math>, если <math>v^2</math> и <math>v_x</math> имеют правильные степенные зависимости от <math>y</math>.</p>			
--	--	--	--	--

.