Материалы для проведения регионального этапа

XLIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2022–2023 учебный год

Первый день

13–14 февраля 2023 г.

Москва, 2023

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **13 февраля 2023 г.** (I тур) и **14 февраля 2023 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2022–2023 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Велодорожка состоит из двух участков: сначала идёт асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени? (*И. Богданов*)

Ответ. Они затратили поровну времени.

Первое решение. Между двумя моментами встречи каждый мальчик проехал половину асфальтового и половину песчаного участков, и они затратили на это поровну времени. Значит, на всю дорожку каждый из них затратил вдвое больше времени, то есть тоже поровну.

Второе решение. Нарисуем графики движения мальчиков по дорожке: на горизонтальной оси отмечаем время t, на вертикальной — положение y мальчика, считая от начала дорожки.

Пусть P_0, P_1, P_2 — точки, соответствующие старту Пети, моменту, когда он перешёл с асфальтового участка на песчаный, и его финишу; пусть V_0, V_1, V_2 — аналогичные точки для Васи. Тогда графики движения мальчиков — это ломаные $P_0P_1P_2$ и $V_0V_1V_2$, при этом отрезки P_0V_0, P_1V_1 и P_2V_2 горизонтальны (см. рис. 1). По условию, середины отрезков P_0P_1 и V_0V_1 совпадают, откуда $P_0V_0P_1V_1$ — параллелограмм. Аналогично, $P_1V_1P_2V_2$ — параллелограмм. Значит, отрезки P_0V_0, V_1P_1 и P_2V_2 параллельны и равны. Поэтому между моментами финиша Пети и Васи прошло столько же времени, сколько и между моментами их старта; отсюда и следует ответ.

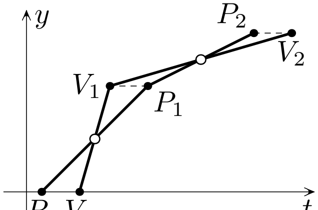

Рис. 1

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ, подтверждённый вычислениями в каких-то конкретных частных случаях — 1 балл.

9.2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

(*Д. Храмцов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Многоугольник, у которого площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см), назовём *хорошим.*

Заметим, что исходный треугольник — хороший: он прямоугольный с катетами 5 см и 12 см, поэтому его площадь равна 30 см^2 и численно совпадает с его периметром, равным $5 + 12 + 13 = 30$ см.

Если какой-то многоугольник П разбит на хорошие многоугольники, то площадь П, равная сумме площадей всех многоугольников разбиения, совпала бы численно с суммой периметров многоугольников разбиения. Но сумма этих периметров больше периметра П (на удвоенную сумму длин общих частей границ многоугольников разбиения). Получаем, что площадь П больше его периметра.

Значит, никакой хороший многоугольник, в том числе данный треугольник, нельзя разрезать на несколько (больше одного) хороших многоугольников.

Комментарий. Только замечено, что исходный треугольник хороший — 1 балл.

Показано только, что хороший многоугольник не разбивается на хорошие — 5 баллов.

9.3. Дано натуральное число n. На клетчатой доске $2n \times 2n$ расставили $2n$ ладей так, что никакие две не стоят в одной горизонтали или одной вертикали. После этого доску разрезали по линиям сетки на две связных части, симметричных друг другу относительно центра доски. Какое наибольшее количество ладей могло оказаться в одной из частей? (Клетчатая фигура называется *связной*, если по этой фигуре от любой её клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.) (*Д. Храмцов*)

Ответ. $2n-1$.

Решение. Заметим, что в каждой вертикали и каждой горизонтали стоит ровно по одной ладье.

Покажем сначала, что все $2n$ ладей не могли попасть в одну часть. Пусть A, B, C, D — угловые клетки доски (в порядке обхода против часовой стрелки, см. рис. 2). Из симметрии, A и C должны принадлежать разным частям, как и B и D. Это значит, что либо A и B, либо A и D лежат в одной части, а остальные две клетки — в другой.

Пусть для определённости A и B лежат в части I. Тогда все граничные клетки между ними также должны лежать в части I; действительно, если какая-то такая клетка X лежит в части II, то в ней же лежит какой-то путь из X в C, а в части I лежит какой-то путь из A в B; но эти пути должны иметь общую клетку, что невозможно.

Значит, вся горизонталь между клетками A и B лежит в части I, то есть в ней должна быть хотя бы одна ладья. Аналогично, в части II тоже есть целая горизонталь (между C и D), а значит, есть ладья. Отсюда и следует требуемое.

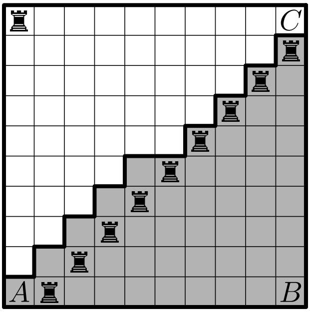

Рис. 2

Осталось привести пример, когда в одной из частей расположено $2n-1$ ладей. Один из возможных примеров устроен так. Рассмотрим диагональ квадрата; в одну часть попадут клетки ниже неё, а также нижняя половина самой диагонали; остальные клетки попадут во вторую часть. Расставим $2n-1$ ладью в клетки непосредственно под диагональю; тогда они окажутся в одной части. Оставшуюся ладью поставим в пересечение оставшихся строки и столбца. На рис. 2 указан такой пример при $n=5$.

Замечание. Ключевым соображением в оценке является следующее: *Если на границе выбраны четыре клетки P, Q, R,*

S, обозначенные в порядке обхода, то любой путь между P и R имеет общую клетку с любым путём между Q и S.

С использованием этого утверждения оценку можно провести по-разному. Например, из симметрии, есть $4n$ граничных отрезков доски, принадлежащих одной части, и $4n$ принадлежащих другой. Из соображения выше, каждые $4n$ отрезков образуют группу подряд идущих; значит, среди них есть все отрезки какой-то стороны, и мы опять получаем, что в каждой части есть одна из граничных линий (вертикаль или горизонталь).

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример, когда $2n-1$ ладья находятся в одной части — 2 балла.

Только оценка, доказывающая, что $2n$ ладей в одной части быть не может — 5 баллов.

Соображение, выделенное курсивом в комментарии выше, принимается без доказательства.

9.4. Даны натуральные числа a, b и c. Ни одно из них не кратно другому. Известно, что число $abc+1$ делится на $ab-b+1$. Докажите, что $c \geqslant b$. (*М. Антипов*)

Первое решение. Предположим противное: пусть $b \geqslant c+1$. Из делимости $abc+1$ на $ab-b+1$ следует, что число $b(ac-a+1)=(abc+1)-(ab-b+1)$ кратно $ab-b+1$. Поскольку числа b и $ab-b+1=b(a-1)+1$ взаимно просты, получаем, что $ac-a+1$ делится на $ab-b+1$. Ясно, что $ac-a+1>0$, поэтому либо $ac-a+1=ab-b+1$, либо $ac-a+1 \geqslant 2(ab-b+1)$.

В первом случае получаем $b=a(b-c+1)$ и, значит, b делится на a, что невозможно по условию. Во втором случае имеем

$$ac-a \geqslant 2b(a-1)+1 > 2b(a-1) > 2c(a-1),$$

то есть $ac<2c-a<2c$. Это значит, что $a<2$, то есть $a=1$; но это также невозможно по условию, ибо тогда снова b делится на a.

Второе решение. Опять же предположим противное. Поскольку $abc+1$ делится на $ab-b+1$, то и $bc-c+1=(abc+1)-c(ab-b+1)$ тоже кратно $ab-b+1$, то есть $bc-c+1=k(ab-b+1)$ при некотором натуральном k. Иначе говоря,

$$0=(bc-c+1)-k(ab-b+1)=b(c-ka+k)-(k+c-1). \quad (*)$$

Значит, $k + c - 1$ делится на b.

По нашему предположению, $c < b$. С другой стороны, поскольку $a > 1$ (иначе b делится на a), имеем

$$bc - c + 1 = c(b-1) + 1 < b^2 < b(b+1) \leqslant b(b(a-1)+1),$$

откуда $k < b$. Значит, $0 < k + c - 1 < 2b$, и потому $k + c - 1 = b$.

Теперь $(*)$ переписывается в виде $0 = b(c - ka + k) - b$, то есть $c - ka + k - 1 = 0$. Но тогда $ka = k + c - 1 = b$, то есть b делится на a. Это невозможно.

Комментарий. Доказано, что $ac-a+1$ или $bc-c+1$ делится на $ab - b + 1$ — 2 балла.

9.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность γ. Оказалось, что окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются друг друга внешним образом в точке S. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что перпендикуляр ℓ к прямой MN, восставленный в точке M, пересекает прямую CS в точке, лежащей на γ.

(*И. Почепцов, Д. Бродский*)

Решение. Обозначим окружности с диаметрами AB и CD через ω_1 и ω_2 соответственно. Заметим, что точка S лежит на отрезке MN.

Пусть прямые CS и DS пересекают ℓ в точках P и Q соответственно (см. рис. 3). Поскольку CD — диаметр ω_2, имеем $\angle PSQ = \angle CSD = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике PSQ отрезок SM — высота, поэтому $\angle MSP = 90^\circ - \angle SPM = \angle SQP$. С другой стороны, поскольку $NS = NC$, имеем $\angle SCD = \angle CSN = \angle MSP$. Итак, $\angle SCD = \angle MSP = \angle SQP$, то есть точки P, Q, C и D лежат на одной окружности γ'.

Пусть теперь прямая MC пересекает окружности γ и γ' в точках X и X' соответственно (точка M лежит на отрезках CX и CX'). Тогда $MC \cdot MX = MA \cdot MB = MS^2$, поскольку M — центр окружности ω_1. С другой стороны, $MC \cdot MX' = MP \cdot MQ = MS^2$; последнее равенство опять же вытекает из того, что SM — высота в прямоугольном треугольнике PSQ. Значит, $MC \cdot MX = MS^2 = MC \cdot MX'$, то есть $X = X'$. Но точка X отлична от C и D, так как M не лежит на CD; значит, окружности γ и γ' имеют три общих точки C, D, X, то есть они совпадают. Поэтому P лежит на γ, что и требовалось доказать.

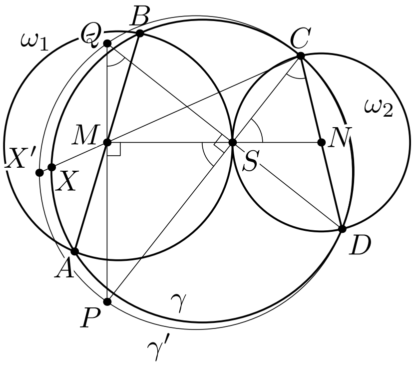

Рис. 3

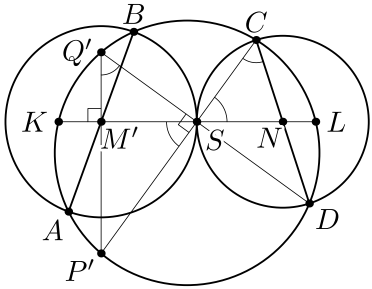

Рис. 4

Замечание 1. Решение можно было бы завершить многими разными способами. Например, равенства $MP \cdot MQ = MS^2 = MA \cdot MB$ означают, что точки P, Q, A и B лежат на одной окружности δ. Тогда либо окружности γ, γ' и δ совпадают, либо это три разных окружности. Во втором случае радикальные оси этих трёх окружностей должны пересекаться в одной точке или быть параллельными; но эти радикальные оси — это прямые PQ, AB и CD, и для них эти утверждения неверны.

Рассуждение выше имеет недостаток: оно не проходит в случае, когда точки P, Q, A и B лежат на одной прямой. Этот случай легко разобрать отдельно (тогда MN проходит через центр окружности γ, $AB \parallel CD$ и $AC \perp BD$).

Замечание 2. Существуют и другие решения, идейно схожие с приведённым выше. Например, можно рассуждать так.

Пусть лучи CS и DS пересекают γ повторно в точках P' и Q' (см. рис. 4). Пусть $M' = P'Q' \cap MN$. Тогда $\angle DQ'P' = \angle DCS = \angle CSN = \angle M'SP'$, откуда $MN \perp P'Q'$. Тогда SM' — высота в прямоугольном треугольнике, и $M'P' \cdot M'Q' = M'S^2$. С другой стороны, если прямая MN пересекает γ в точках K и L, то $M'K \cdot M'L = M'P' \cdot M'Q' = M'S^2$. Однако, как нетрудно проверить, на отрезке KL есть только две точки X такие, что $XK \cdot XL = XS^2$, и это точки $X = M$ и $X = N$. Значит, $M' = M$, что и требовалось доказать.

Комментарий. В целом верное решение не проходит для *вырожденных* случаев (как указано, например, в Замечании 1) — снимается 1 балл.

10 класс

10.1. В таблице 6×6 изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами? (*А. Кузнецов, П. Кожевников*)

Ответ. Можно.

Решение. Один из многих возможных примеров показан на рисунке.

Комментарий. Только ответ, но не предъявлен пример — 0 баллов.

Неверное решение с неверным ответом — 0 баллов.

За отсутствие подсчёта сумм в правильном примере баллы не снижаются.

Если в примере какие-то суммы совпадают, но верно отмечены клетки, в которых можно делать операции — ставится 5 баллов из 7.

1	2	9	10	20	90	
1	2	0	0	0	0	3
0	0	4	0	0	0	4
0	0	5	0	0	0	5
0	0	0	10	20	0	30
0	0	0	0	0	40	40
0	0	0	0	0	50	50

Рис. 5

10.2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)? (*Д. Храмцов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Многоугольник, у которого площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см), назовем *хорошим.*

Заметим, что исходный треугольник — хороший: он прямоугольный с катетами 5 см и 12 см, поэтому его площадь равна 30 см^2 и численно совпадает с его периметром, равным $5 + 12 + 13 = 30$ см.

Если какой-то многоугольник П разбит на хорошие многоугольники, то площадь П, равная сумме площадей всех многоугольников разбиения, совпала бы численно с суммой периметров многоугольников разбиения. Но сумма этих периметров больше периметра П (на удвоенную сумму длин общих частей границ многоугольников разбиения). Получаем, что площадь П больше его периметра.

Значит, никакой хороший многоугольник, в том числе данный треугольник, нельзя разрезать на несколько (больше одного) хороших многоугольников.

Комментарий. Только замечено, что исходный треугольник хороший — 1 балл.

Показано только, что хороший многоугольник не разбивается на хорошие — 5 баллов.

10.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах. (*В. Дольников*)

Решение. Предположим противное, и пусть в множестве всех школьников есть различные 30-элементные подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ (множества участников каждой олимпиады) такие, что пересечение любых 30 из них непусто, а пересечение всех — пусто.

Пусть среди множеств A_1, A_2, …, A_{50} нашлись два множества B и C, имеющие $k \leqslant 28$ общих элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Для каждого элемента x_i среди множеств A_1, A_2, …, A_{50} найдём подмножество D_i, не содержащее x_i (такое подмножество D_i найдётся, иначе x_i — общий элемент множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$). (Заметим, что среди подмножеств D_i могут быть совпадающие.) Тогда пересечение не более 30 подмножеств B, C, $D_1, \ldots, D_k$ — пусто. Это противоречит нашему предположению (к данным подмножествам можно добавить еще несколько, чтобы стало 30 подмножеств, при таком добавлении пересечение остается пустым).

Значит, указанных двух множеств B и C не найдётся. Тогда пересечение любых двух из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ содержит в точности 29 элементов. Пусть $A_1 \cap A_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, так что $A_1 = \{z_1, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, $A_2 = \{z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$. Найдём подмножество (пусть, для определенности, это подмножество — A_3), не содержащее y_1. Так как $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 29$, то A_3 обязано содержать все элементы $z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}$. Этих элементов 30 (все они различны), поэтому $A_3 = \{z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}\}$. Рассмотрим любое подмножество A_i из подмножеств $A_4, \ldots, A_{50}$. Предположим, что A_i содержит элемент, лежащий вне 31-элементного множества $K = \{z_1, z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Тогда A_i должно пересекаться с каждым из подмножеств A_1, A_2, A_3 по одному и тому же 29-элементному подмножеству множества K. Но $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28$, значит, такого 29-элементного подмножества не существует — противоречие. Отсюда делаем вывод, что все множества $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ являются подмножествами множества K. Но в множестве K количество 30-элементных подмножеств равно $31 < 50$. Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда пересечение любых двух из множеств содержит в точности 29 элементов (а этот случай не разобран) — 3 балла.

10.4. Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1$, $b > c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a.

(*М. Антипов*)

Решение. Из условия следует, что $(abc+1) - (ab-b+1) = abc - ab + b = b(ac - a + 1)$ делится на $ab - b + 1$. Заметим, что b и $ab - b + 1 = (a-1)b + 1$ взаимно просты, отсюда получаем, что $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$.

Далее замечаем, что $0 < ac - a + 1 < 2(ab - b + 1)$. Действительно, $2(ab-b+1) = (2a-2)b+2 > (2a-2)c+2 = ac+(a-2)c+ +2 \geqslant ac+2 > ac-a+1$. Значит, делимость $ac-a+1$ на $ab-b+1$ возможна только в случае равенства $ac - a + 1 = ab - b + 1$.

Имеем $a(c-1) = ac - a = ab - b = (a-1)b$. Видим, что $(a-1)b$ делится на a, но так как $a - 1$ и a взаимно просты, отсюда следует, что b делится на a, что и требовалось доказать.

Замечание. Приводить примеры чисел, удовлетворяющих условию, в решении не требуется. Но из решения несложно получить даже полное описание всех троек, удовлетворяющих условию: $(a, b, c) = (a, ma, (a-1)m+1)$, где $a > 1$, $m > 1$ — произвольные натуральные числа.

Комментарий. Доказано, что $ac - a + 1$ делится на $ab - b + 1$ — 2 балла. В случае, если доказано, что $b(ac - a + 1)$ делится на $ab - b + 1$, либо получены другие делимости, баллы не начисляются.

Доказано, что $ac-a+1$ делится на $ab-b+1$, и далее доказано, что частное может равняться только 1, т.е. выведено равенство $ac - a + 1 = ab - b + 1$ — 5 баллов.

Доказано, что $ac-a+1$ делится на $ab-b+1$, далее не доказано, что частное может равняться только 1, но верно рассмотрен случай равенства $ac - a + 1 = ab - b + 1$ — 3 балла.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H. Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность, описанную около треугольника BCD, в точках P и Q. Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180°$. (*М. Туревский, М. Дидин*)

Решение. Заметим, что $PQ \parallel CD$, так что PQ — средняя линия прямоугольного треугольника AHD. Значит, PQ пересекает гипотенузу AH в её середине M, так что $MA = MD = MH$ (см. рис. 6).

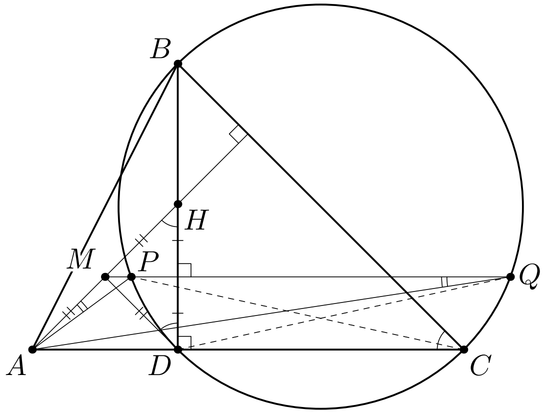

Рис. 6

Имеем $\angle MDH = \angle MHD$, а поскольку $MH \perp BC$ и $HD \perp CD$, имеем также $\angle MHD = \angle BCD$. Получаем равенство

$\angle MDH = \angle BCD$, из которого следует касание прямой MD и окружности (BCD) в точке D. Отсюда $MD^2 = MP \cdot MQ$ (по теореме о произведении отрезков секущей).

Далее, $MA^2 = MP \cdot MQ$. Значит, треугольники AMP и QMA подобны (угол AMQ общий и $MA/MP = MQ/MA$). Отсюда $\angle MQA = \angle MAP$, поэтому $\angle MPA + \angle MQA = \angle MPA + \angle MAP = \angle HMQ = 90^\circ - \angle MHD = \angle CBD$. Итак, $\angle APB + \angle AQB = \angle CBD$, и, поскольку $\angle APB + \angle AQB = (\angle MPA + \angle MQA) + (\angle MPB + \angle MQB)$, для завершения решения остаётся убедиться, что $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - \angle CBD$.

Для определённости далее считаем, что P лежит между M и Q. Имеем $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - (\angle BPQ - \angle PQB)$. Так как $PQ \parallel CD$, то дуги PD и CQ равны, а значит, опирающиеся на них вписанные углы равны. Тогда $\angle BPQ - \angle PQB = \angle BDQ - \angle PCB = (\angle BDC - \angle QDC) - (\angle DCB - \angle DCP) = \angle BDC - \angle DCB = 90^\circ - \angle DCB = \angle CBD$, что завершает доказательство.

Замечание. Во второй части решения счёт углов можно провести разными способами. Попутно можно доказать, что H — это ортоцентр треугольника BPQ.

Комментарий. Доказано соотношение $MA^2 = MP \cdot MQ$ или, эквивалентно, подобие $AMP \sim QMA$ или, эквивалентно, найдена сумма $\angle MPA + \angle MQA = \angle CBD$ — 3 балла.

Проведён счёт углов, доказывающий равенство $\angle MPB + \angle MQB = 180^\circ - \angle CBD$ или эквивалентное утверждение — 1 балл.

11 класс

11.1. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трёх натуральных чисел a, b, c таких, что a делится на $b+c$ и $b+c$ делится на $b-c+1$? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, такие три числа найдутся. Поскольку a кратно $b+c$, сумма $a+(b+c)=2023$ также кратна $b+c$, из чего следует, что $b+c$ нечётно. Значит, $b-c+1$ — чётное число, и нечётное число $b+c$ не может на него делиться.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

11.2. Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=b$ имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения $(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)=b$. (*А. Антропов, К. Сухов*)

Ответ. $-a_1$, $-a_2$ и $-a_3$.

Первое решение. Так как многочлен $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)-b$ имеет старший коэффициент 1 и корни c_1, c_2, c_3, то $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)-b=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$. Подставим $-x$ в последнее равенство вместо x, получим $(-x-a_1)(-x-a_2)(-x-a_3)-b=(-x-c_1)(-x-c_2)(-x-c_3)$, что равносильно $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)+b=(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)$. Из полученного равенства получаем, что тремя корнями уравнения $b=(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)$ являются числа $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$.

Второе решение. По теореме Виета выполняются следующие соотношения:

$$c_1+c_2+c_3=a_1+a_2+a_3,$$
$$c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1,$$
$$c_1c_2c_3=a_1a_2a_3-b.$$

Эти же равенства можно переписать следующим образом:

$$(-a_1)+(-a_2)+(-a_3)=(-c_1)+(-c_2)+(-c_3),$$
$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1,$$
$$-a_1a_2a_3=-c_1c_2c_3-b,$$

из чего следует, что числа $-a_1$, $-a_2$ и $-a_3$ являются корнями уравнения $(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)-b=0$.

Замечание. Если в первое уравнение подставить вместо x

числа c_1, c_2 и c_3, то из полученных трёх равенств $(c_1 - a_1)(c_1 - a_2)(c_1 - a_3) = b$, $(c_2 - a_1)(c_2 - a_2)(c_2 - a_3) = b$ и $(c_3 - a_1)(c_3 - a_2)(c_3 - a_3) = b$ непосредственно не следует, например, что $(-a_1 + c_1)(-a_1 + c_2)(-a_1 + c_3) = b$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 1 балл.

Алгебраические преобразования, не приведшие к обоснованию ответа — баллы не добавляются.

11.3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдётся школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдётся школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах. (*В. Дольников*)

Решение. Предположим противное, и пусть в множестве всех школьников есть 30-элементные подмножества A_1, A_2, ..., A_{50} (множества участников каждой олимпиады) такие, что пересечение любых 30 из них непусто, а пересечение всех — пусто.

Пусть среди множеств A_1, A_2, ..., A_{50} нашлись два множества B и C, имеющие $k \leqslant 28$ общих элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Для каждого элемента x_i среди множеств A_1, A_2, ..., A_{50} найдём подмножество D_i, не содержащее x_i (такое подмножество D_i найдётся, иначе x_i — общий элемент множеств A_1, A_2, ..., A_{50}). (Заметим, что среди подмножеств D_i могут быть совпадающие.) Тогда пересечение не более 30 подмножеств B, C, D_1, ..., D_k — пусто. Это противоречит нашему предположению (к данным подмножествам можно добавить еще несколько, чтобы стало 30 подмножеств, при таком добавлении пересечение остается пустым).

Значит, указанных двух множеств B и C не найдётся. Тогда пересечение любых двух из множеств A_1, A_2, ..., A_{50} содержит в точности 29 элементов. Пусть $A_1 \cap A_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, так что $A_1 = \{z_1, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$, $A_2 = \{z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\}$. Найдём подмножество (пусть, для определенности, это подмножество — A_3), не содержащее y_1. Так как $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 29$, то A_3 обязано содержать все элементы $z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}$. Этих элементов 30 (все они различны), поэтому $A_3 = \{z_1, z_2, y_2, y_3, \ldots, y_{29}\}$. Рассмотрим любое подмножество A_i из подмножеств $A_4, \ldots, A_{50}$. Предположим, что A_i содержит элемент, лежащий вне 31-элементного множества $K = \{z_1, z_2, y_1, y_2, \ldots, y_{29}\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Тогда A_i должно пересекаться с каждым из подмножеств A_1, A_2, A_3 по одному и тому же 29-элементному подмножеству множества K. Но $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 28$, значит, такого 29-элементного подмножества не существует — противоречие. Отсюда делаем вывод, что все множества $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ являются подмножествами множества K. Но в множестве K количество 30-элементных подмножеств равно $31 < 50$. Получаем противоречие, завершающее решение задачи.

Комментарий. Задача сведена к случаю, когда пересечение любых двух из множеств содержит в точности 29 элементов (а этот случай не разобран) — 3 балла.

11.4. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1, 2)$. Если на доске написана пара чисел (a, b), то на доску можно дописать пару $(-a, -b)$, а также пару $(-b, a + b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел (a, b) и (c, d), то на доску можно дописать пару $(a + c, b + d)$. Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара $(2022, 2023)$? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел $(1, 2)$ и $(2, 1)$ считаются различными. (*И. Почепцов*)

Ответ. Не могла.

Первое решение. Докажем, что для любой пары (x, y), записанной на доске, число $2x - y$ делится на 7.

Действительно, для пары $(1, 2)$ число $2 \cdot 1 - 1 = 0$ делится на 7.

Пусть для пары (a, b) число $2a - b$ делится на 7. Тогда для пары $(-a, -b)$ число $2 \cdot (-a) - (-b) = -(2a - b)$ делится на 7, и для пары $(-b, a + b)$ число $2 \cdot (-b) - (a + b) = -a - 3b = 3(2a - b) - 7a$ делится на 7.

Пусть для пар (a, b), (c, d) числа $2a - b$, $2c - d$ делятся на 7. Тогда для пары $(a + c, b + d)$ число $2(a + c) - (b + d) = (2a - b) + (2c - d)$ делится на 7.

Так как для пары $(2022, 2023)$ число $2 \cdot 2022 - 2023 = 2021$ не делится на 7, эта пара на доске появиться не может.

Второе решение. Будем к каждой паре (a, b) на доске дописывать третье число $c = -a - b$. Тогда сумма чисел в каждой тройке будет равна нулю, а правила дописывания новых пар будут такими: если на доске записана тройка (a, b, c), то можно дописать тройки $(-a, -b, -c)$ и $(-b, -c, -a)$, а если записаны тройки (a, b, c) и (d, e, f), то можно дописать тройку $(a+d, b+e, c+f)$ — назовём эту тройку *суммой* троек (a, b, c) и (d, e, f). Также для тройки (a, b, c) и целого числа k обозначим через $k \cdot (a, b, c)$ тройку (ka, kb, kc).

Докажем, что все тройки, появляющиеся на доске, имеют вид
$$(a, b, c) = k \cdot (1, 2, -3) + \ell \cdot (2, -3, 1) + m \cdot (-3, 1, 2) \qquad (*)$$
с целыми k, ℓ и m. В начальный момент времени это верно: $(1, 2, -3) = 1 \cdot (1, 2, -3) + 0 \cdot (2, -3, 1) + 0 \cdot (-3, 1, 2)$. Теперь достаточно показать, что из троек, имеющих вид $(*)$, также получаются лишь такие тройки. Для операции взятия суммы троек это очевидно. Для остальных операций это тоже несложно проверить: если (a, b, c) имеет вид $(*)$, то
$$(-a, -b, -c) = (-k) \cdot (1, 2, -3) + (-\ell) \cdot (2, -3, 1) + (-m) \cdot (-3, 1, 2),$$
$$(-b, -c, -a) = (-m) \cdot (1, 2, -3) + (-k) \cdot (2, -3, 1) + (-\ell) \cdot (-3, 1, 2).$$
Утверждение доказано.

Предположим теперь, что на доске появилась тройка $(2022, 2023, -4045)$, то есть она имеет вид $(*)$. Тогда имеем
$$2022 = k + 2\ell - 3m \quad \text{и} \quad 2023 = 2k - 3\ell + m.$$
Выражая из первого равенства $k = 2022 - 2\ell + 3m$ и подставляя во второе, получаем $2023 = 2 \cdot 2022 - 7\ell + 7m$, то есть $7(m - \ell) = 2023 - 2 \cdot 2022 = -2021$. Однако это невозможно, поскольку 2021 не делится на 7.

Замечание. Можно показать, что указанными операциями получаются *все* тройки, имеющие вид $(*)$. Также можно заметить, что $(-3, 1, 2) = -(1, 2, -3) - (2, -3, 1)$, так что в формуле $(*)$ можно обойтись без третьего слагаемого.

Аналогичное решение можно получить и без дописывания третьего числа к паре (однако оно будет выглядеть менее естественно). Именно, можно доказать, что все пары, появляющиеся на доске в исходном процессе, имеют вид

$$(a, b) = k \cdot (1, 2) + \ell \cdot (2, -3) \qquad (**)$$

с целыми k и ℓ. Заметим здесь, что если пара (a, b) имеет вид $(**)$, то

$$(-b, a + b) = \ell \cdot (1, 2) + (\ell - k) \cdot (2, -3).$$

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Сформулировано утверждение о том, что все получающиеся пары имеют вид $(**)$ — 1 балл.

Это утверждение доказано — ещё 3 балла.

Участник перешёл от пар чисел к тройкам (как во втором решении) — 1 балл.

После этого *замечено*, что все тройки представляются в виде $(*)$ — ещё 3 балла.

После перехода от пар к тройкам утверждение о представимости в виде $(*)$ принимается без доказательства.

11.5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH, медиана AM, а также отмечен центр O его описанной окружности ω. Отрезки OH и AM пересекаются в точке D, прямые AB и CD — в точке E, прямые BD и AC — в точке F. Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y. Докажите, что прямые BY, CX и AH пересекаются в одной точке. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть P — такая точка на луче HE, что $PB \perp$ $\perp BC$ (см. рис. 7). Докажем, что точки C, O и P лежат на одной прямой.

В самом деле, по теореме Менелая для треугольника ADE и прямой CMB имеем $\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AB}{BE} = 1$. Поскольку прямые PB, AH и OM параллельны между собой (так как они все перпендикулярны прямой BC), имеем $AB/BE = HP/PE$, а также $DM/MA = DO/OH$. Значит, $\frac{EC}{CD} \cdot \frac{DO}{OH} \cdot \frac{HP}{PE} = 1$, из чего следует, что точки C, O и P лежат на одной прямой по теореме Менелая для треугольника EDH. Значит, точка P диаметрально противоположна точке C в окружности ω. Аналогично, если Q — точка пересечения перпендикуляра к прямой BC, проходящего через точку C, и прямой HF, то точка Q диаметрально противо-

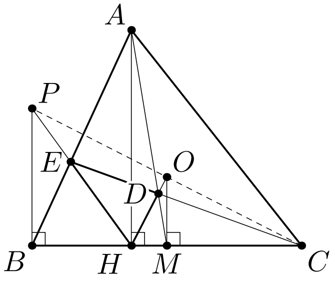

Рис. 7

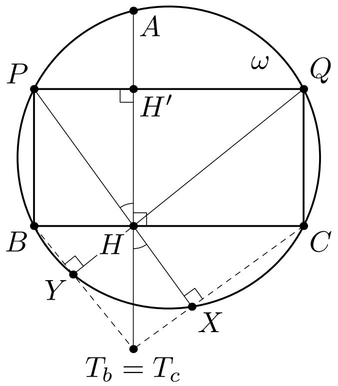

Рис. 8

положна точке B. Из этого следует, что $\angle EXC = \angle PXC = 90^\circ$, и, аналогично, $\angle FYB = \angle QYB = 90^\circ$.

Обозначим через H', T_b и T_c точки пересечения прямой AH соответственно с прямыми PQ, BY и CX (см. рис. 8). Заметим, что треугольники HXT_c и $HH'P$ подобны как прямоугольные с вертикальными острыми углами. Значит, $HT_c/HX = HP/HH'$, или $HT_c = HX \cdot HP/HH' = HB \cdot HC/HH'$. Аналогично, $HT_b = HB \cdot HC/HH'$. Значит, прямые BY и CX пересекают прямую AH в одной и той же точке, что и требовалось доказать.

Комментарий. Отмечены точки, диаметрально противоположные точкам B и C на окружности ω — 0 баллов.

Отмечены вторые точки пересечения прямых XH и YH с ω — 0 баллов.

Утверждается, но не доказывается, что вторые точки пересечения прямых XH и YH с ω — это точки, диаметрально противоположные вершинам B и C — 1 балл. Если это утверждение доказано — 3 балла.

Задача сведена к доказательству факта совпадения указанных точек, но совпадение не доказано — 4 балла.

Баллы за указанные продвижения не суммируются.